Toute calculatrice autorisée.
Le sujet comporte un total de 6 exercices.

Les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité traiteront les exercices 1, 2, 3, 4 et 5.
Les élèves suivant l'enseignement de spécialité traiteront les exercices 1, 2, 3, 4 et 6.

EXERCICE 1 (5 points)
Commun à tous les candidats.

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f_1(x)=2x-2+\sqrt{x}$$

   a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Déterminer la dérivée de f_1 sur $]0\,;+\infty[$.
   c. Dresser le tableau de variation de f_1.

2. Soit *n* un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x)=2x-2+\frac{\sqrt{x}}{n}$$

   a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
   b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
   c. Démontrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n sur $[0\,;+\infty[$.
   d. Justifier que, pour tout entier naturel *n*, $0<\alpha_n<1$.

3. Démontrer que pour tout entier naturel non nul *n* :

$$f_n(\alpha_{n+1})>0$$

4. **Etude de la suite (α_n)**
   a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.
   b. En déduire qu'elle est convergente.
   c. Utiliser l'expression $\alpha_n=1-\dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

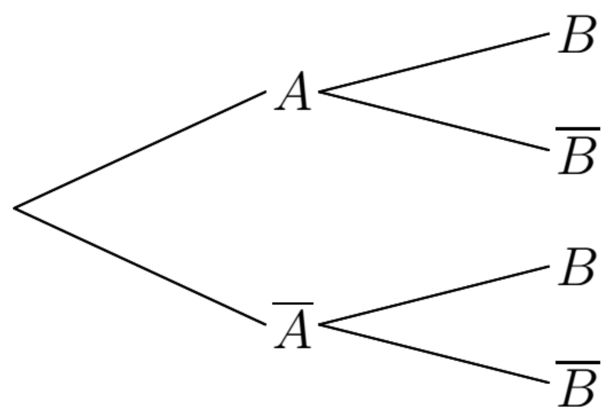
EXERCICE 2 (3 points)
Commun à tous les candidats.

Une revue est proposée en deux versions : papier ou électronique. Il est possible de s'abonner à une seule des deux versions ou de s'abonner simultanément aux deux versions. Un centre d'appel est chargé de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels. On admet que :

- Lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par le centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à la version papier est égale à 0,2 ;
- S'il s'abonne à la version papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à la version électronique est égale à 0,4 ;
- S'il ne s'abonne pas à la version papier, la probabilité qu'il s'abonne à la version électronique est égale à 0,1.

Une personne figurant sur la liste des lecteurs potentiels est contactée par le centre d'appel. On note :

- A : l'événement « la personne s'abonne à la version papier » ;
- B : l'événement « la personne s'abonne à la version électronique ».



1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.
2. a. Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à la version papier et à la version électronique.

   b. Justifier que la probabilité de l'événement B est égale à 0,16.

   c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à la version électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à la version papier ?

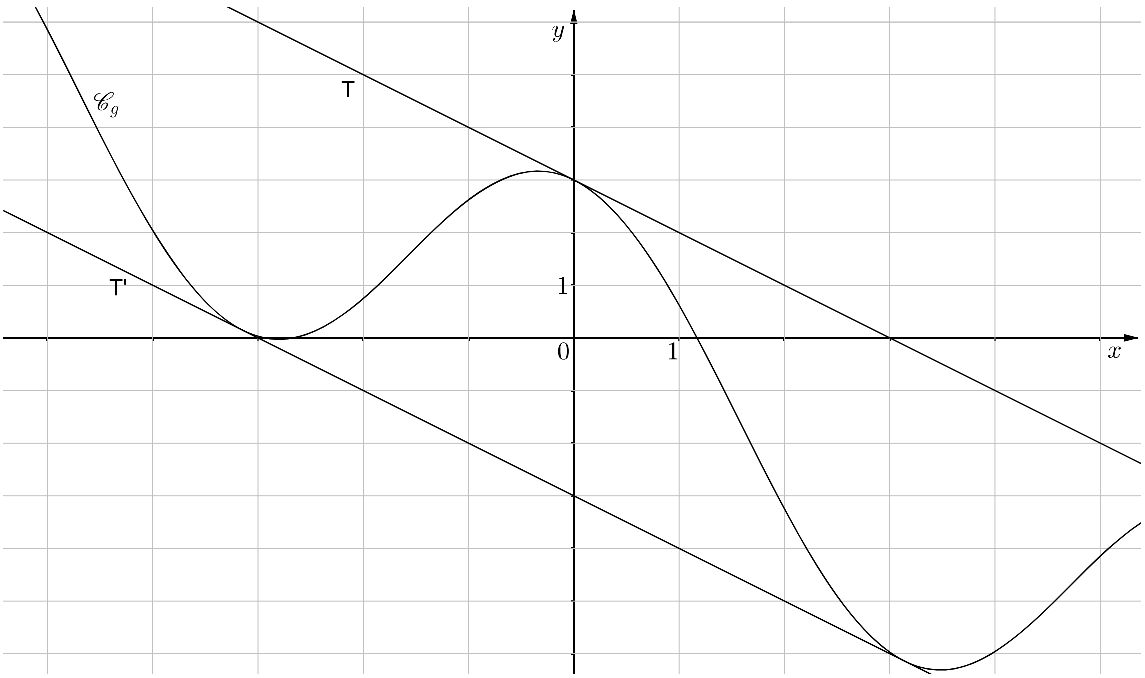
EXERCICE 3 (3 points)
Commun à tous les candidats.

La courbe $\mathscr{C}_g$ donnée ci-après représente, dans un repère orthogonal, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x + 3\cos x$$

T est la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

T' est la droite d'équation $y = -x - 3$.



1. Démontrer que pour tout réel x, T' est en dessous de $\mathscr{C}_g$ et que $\mathscr{C}_g$ est en dessous de T.
2. Démontrer que T est la tangente à $\mathscr{C}_g$ en une infinité de points. Préciser les coordonnées de ces points.
3. Démontrer que T' est la tangente à $\mathscr{C}_g$ en une infinité de points. Préciser les coordonnées de ces points.

<u>EXERCICE 4</u> (5 points)
Commun à tous les candidats.

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geq 0$:

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1. Calculer d_1 et a_1.
2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.

L'algorithme suivant est proposé :

```
Variables :        n et k sont des entiers naturels
                   D et A sont des réels

Initialisation :   D prend la valeur 300
                   A prend la valeur 450
                   Saisir la valeur de n

Traitement :       Pour k variant de 1 à n
                          D prend la valeur D/2 + 100
                          A prend la valeur A/2 + D/2 + 70
                   Fin Pour

Sortie :           Afficher D
                   Afficher A
```

a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n=1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question 1. ?

b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. a. Pour tout entier naturel *n*, on pose $e_n = d_n - 200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de *n*.

c. La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. On admet que pour tout entier naturel *n*,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$$

a. Montrer que pour tout entier *n* supérieur ou égal à 3, on a : $2n^2 \geq (n+1)^2$.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier *n* supérieur ou égal à 4, $2^n \geq n^2$.

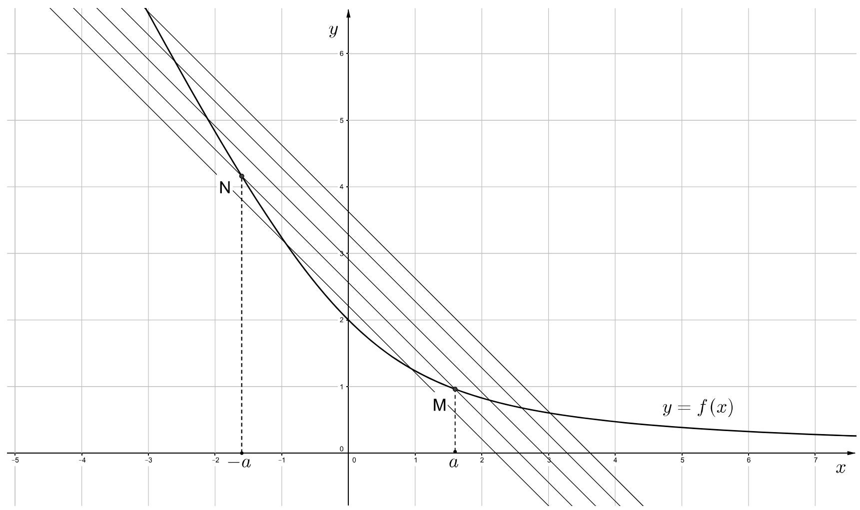
c. En déduire que pour tout entier *n* supérieur ou égal à 4 : $0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$.

d. Etudier la convergence de la suite (a_n).

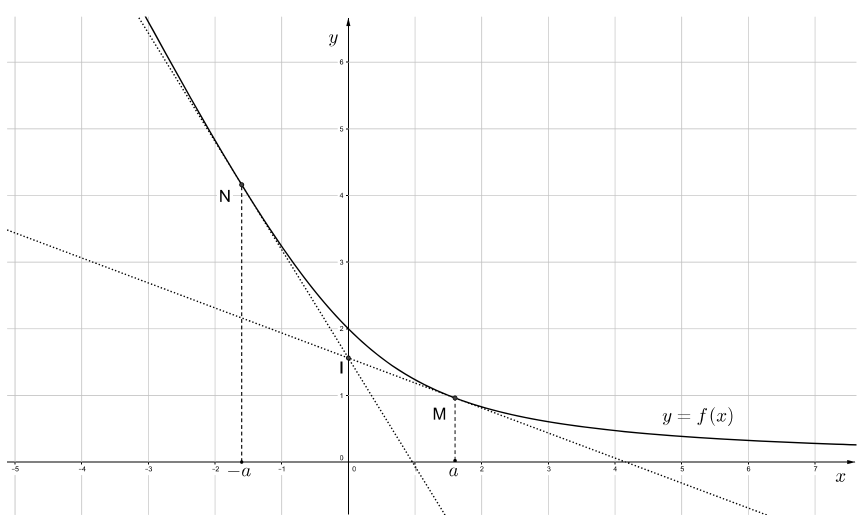
EXERCICE 5 (5 points)
Candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité uniquement.

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + \sqrt{x^2+4}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que pour tout réel *x*, $f(x) > 0$.
2. Pour tout réel *a* non nul, on considère les points M et N de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives *a* et $-a$.
   a. Montrer que les droites (MN) ci-dessous (obtenues pour différentes valeurs de *a*) sont parallèles.



   b. On appelle I le point d'intersection des tangentes à $\mathscr{C}$ aux points M et N.
   Déterminer les coordonnées du point I ainsi que le lieu décrit par le point I lorsque *a* décrit $\mathbb{R}^*$.



<u>EXERCICE 6</u> (5 points)
Candidats suivant l'enseignement de spécialité uniquement

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls (x, y, z) tels que :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Ces triplets seront nommés « pythagoriciens » en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».
Ainsi $(3, 4, 5)$ est un TP car $3^2 = 4^2 + 5^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Partie A : généralités

1. Démontrer que, si (x, y, z) est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet (px, py, pz) est lui aussi un TP.
2. Démontrer que, si (x, y, z) est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.
3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :
   $n = 2^\alpha \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.
   L'écriture $n = 2^\alpha \times k$ est nommée *décomposition* de n.
   Voici par exemple les décompositions des entiers 9 et 120 : $9 = 2^0 \times 9$ et $120 = 2^3 \times 15$.
   a. Donner la décomposition de l'entier 192.
   b. Soit x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.
   Ecrire la décomposition des entiers naturels $2x^2$ et z^2.
   c. En examinant l'exposant de 2 dans la décomposition de $2x^2$ et dans celle de z^2, montrer qu'il n'existe pas de couple (x, z) tel que $2x^2 = z^2$.

On admet que la question **A-3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont 2 à 2 distincts. Comme de plus les entiers naturels x et y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP (x, y, z), les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant :

$$x < y < z$$

Partie B : recherche des triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x, y, 2015)$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, $(2n+1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$.
   Déterminer un TP de la forme $(2015, y, z)$
3. a. En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.
   b. En déduire un TP de la forme $(x, 2015, z)$.

Fin du sujet