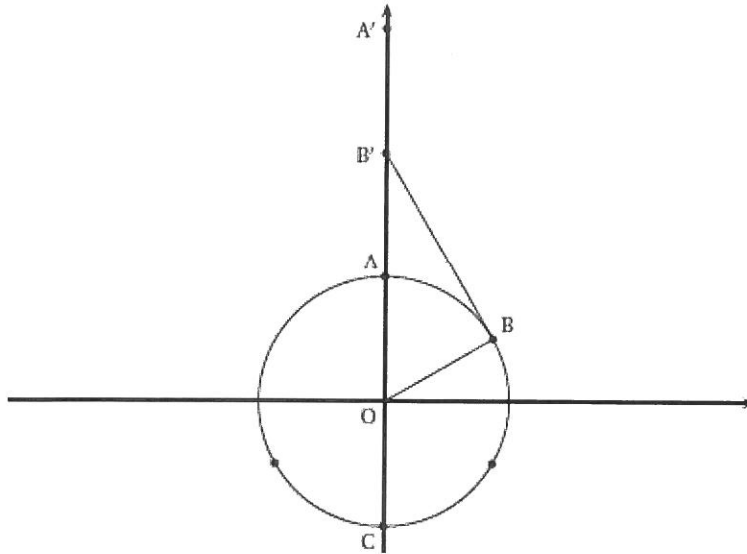


TERMINALE S
CORRIGE BAC BLANC MATHÉMATIQUES N° 2 AVRIL 2013

EXERCICE 1 :

1) a) $a' = a + i - \frac{1}{i} = 2i + i = 3i$; $b' = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} + i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = 2i$
b)



c) Il semble que OBB' soit rectangle :

méthode 1 : réciproque de Pythagore : $OB = |b| = 1$; $OB' = |b'| = 2$ et $BB' = |b' - b| = \left| 2i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right| = \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$, donc : $OB'^2 = OB^2 + BB'^2$, OBB' est rectangle en B

méthode 2 : produit scalaire : $B \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$; $B'(0; 2)$ d'où : $\overrightarrow{OB} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ et $\overrightarrow{BB'} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right)$ donc $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BB'} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$

2) a) Développons : $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \left(z + \frac{i}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = z^2 + iz - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = z^2 + iz - 1$

b) On cherche l'ensemble des points $M(z)$ différents de O tels que $f(M) = 0$, c'est à dire tels que $z' = 0$

on résout donc pour $z \neq 0$: $z + i - \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{z^2 + iz - 1}{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 + iz - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 0$$

cette équation a deux solutions : $z_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$, on trouve

donc $M_1 \left(e^{-i\frac{5\pi}{6}} \right)$ et $M_2 \left(e^{-i\frac{\pi}{6}} \right)$

c) Les points M_1 et M_2 ont une affixe de la forme $e^{i\theta}$, on sait d'après le cours qu'ils sont sur le cercle de centre O de rayon 1, donc sur Γ (on peut dire aussi que $OM_1 = OM_2 = |z_1| = |z_2| = 1$)

Exercice 2

A) 1)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et par inverse $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(1+\frac{1}{x})} = 1$
 et par composée $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln(1) = 0$

Donc finalement par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2) f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\frac{x}{x+1}}$$

$$= \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x}$$

$$= \frac{-x+x+1}{x(x+1)^2} \text{ en réduisant au même dénominateur}$$

$$= \frac{1}{x(x+1)^2}$$

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $x > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$ et on a le tableau de variations :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$\frac{1}{2} - \ln 2$	0

$$f(1) = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,19$$

3) donc sur $[1, +\infty[$ $f(x) < 0$

B) 1)

La boucle est exécutée 3 fois.

Itération 1 : $u = 0 + \frac{1}{1} = 1$

Itération 2 : $u = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Itération 3 : $u = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

Donc la valeur exacte affichée est $\frac{11}{6}$.

2)

Variables :	i et n sont des entiers naturels. u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n .
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n . Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$.
	Fin Pour.
	Affecter à u la valeur $u - \ln(n)$
Sortie :	Afficher u .

3) La suite semble décroissante et converger vers une valeur proche de 0,577.

C) 1)

Pour tout entier $n > 0$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = f(n) \text{ or } f(x) < 0 \text{ pour } x \geq 1$$

donc pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est strictement décroissante.

2) a)

Soit $k > 0$, pour tout $x \in [k, k+1]$ on a :

$$x \geq k \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geq 0 \text{ donc comme } k < k+1$$

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0$$

Par linéarité de l'intégrale en partant de l'inégalité qu'on vient de prouver on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \geq 0 \text{ soit } \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$$

$$\text{donc } \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} (k+1 - k)$$

$$\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

b)

Pour tout entier $n > 0$, on a les inégalités :

$$\ln 2 - \ln 1 \leq 1$$

$$\ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\ln 4 - \ln 3 \leq \frac{1}{3}$$

$$\dots$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

en ajoutant membre à membre ces inégalités on obtient :

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

c) On remarque que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = u_n + \ln(n)$,

$$\ln(n+1) \leq u_n + \ln(n) \Leftrightarrow \ln(n+1) - \ln(n) \leq u_n$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq u_n$$

$$\Leftrightarrow u_n \geq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

donc $u_n \geq 0$

$n > 0$
donc $f_n(1 + \frac{1}{n}) > 0$

3) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

EXERCICE 3 : (NON SPECIALITE)

1. a) L'événement A est l'événement $V_2 \cap V_3$. Puisque $p_1 = 1$, on a $p(V_2) = 0,6$ et $p(\overline{V_2}) = 1 - p(V_2) = 0,4$. Ensuite,

$$p(V_2 \cap V_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36.$$

b) De même,

$$p(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}) = p(\overline{V_2}) \times p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3}) = 0,4 \times 0,9 = 0,36.$$

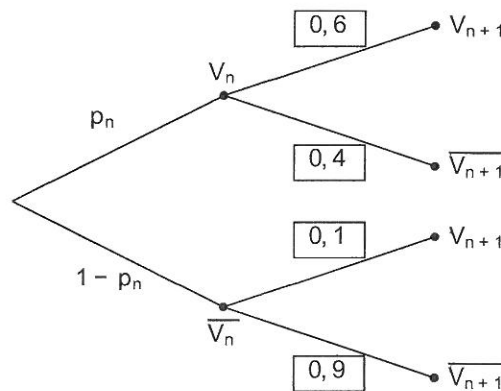
$$p(A) = 0,36 \text{ et } p(B) = 0,36.$$

2. On a aussi $p(\overline{V_2} \cap V_3) = p(\overline{V_2}) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = p(\overline{V_2}) \times (1 - p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3})) = 0,4 \times (1 - 0,9) = 0,04$. Mais alors, d'après la formule des probabilités totales,

$$p_3 = p(V_2 \cap V_3) + p(\overline{V_2} \cap V_3) = 0,36 + 0,04 = 0,4.$$

$$p_3 = 0,4.$$

3.



4. Soit n un entier naturel non nul. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(V_{n+1}) = p(V_n \cap V_{n+1}) + p(\overline{V_n} \cap V_{n+1}) = p(V_n) \times p_{V_n}(V_{n+1}) + p(\overline{V_n}) \times p_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) \\ &= 0,6p_n + 0,1(1 - p_n) = 0,6p_n + 0,1 - 0,1p_n = 0,5p_n + 0,1. \end{aligned}$$

5. a) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5(p_n - 0,2) = 0,5u_n.$$

Donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,2 = 0,8$.

b) On en déduit que pour tout entier naturel non nul n , $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,8 \times (0,5)^{n-1}$ puis que $p_n = u_n + 0,2 = 0,2 + 0,8 \times (0,5)^{n-1}$.

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, u_n = 0,2 + 0,8 \times (0,5)^{n-1}.$$

c) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,2.$$

spe

Question 1.a.

On a : $6^2 = 36 = 3 \times 11 + 3 \equiv 3 [11]$. On en déduit : $6^{10} = (6^2)^5 \equiv 3^5 [11]$. Or : $3^5 = 243 = 11 \times 22 + 1$. Donc $3^5 \equiv 1 [11]$, d'où : $6^{10} \equiv 1 [11]$. Comme $0 \leq 1 < 11$, on en déduit finalement :

Le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 est égal à 1.

Question 1.b.

On a cette fois : $6^2 = 36 = 7 \times 5 + 1 \equiv 1 [5]$. On en déduit immédiatement : $6^4 = (6^2)^2 \equiv 1^2 [5]$, c'est-à-dire $6^4 \equiv 1 [5]$.

Comme $0 \leq 1 < 5$, on en déduit finalement :

Le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 est égal à 1.

Question 1.c.

A la question 1.a., on a obtenu : $6^{10} \equiv 1 [11]$. On en tire : $6^{40} = (6^{10})^4 \equiv 1^4 [11]$ soit $6^{40} \equiv 1 [11]$.

A la question 1.b., on a obtenu : $6^4 \equiv 1 [5]$. On en tire : $6^{40} = (6^4)^{10} \equiv 1^{10} [5]$ soit $6^{40} \equiv 1 [5]$.

Ainsi, on a bien :

$$6^{40} \equiv 1 [11] \text{ et } 6^{40} \equiv 1 [5]$$

Question 1.d.

D'après la question précédente, on a :

- $6^{40} \equiv 1 [11]$, donc 11 divise $6^{40} - 1$;
- $6^{40} \equiv 1 [5]$, donc 5 divise $6^{40} - 1$.

Ainsi, il existe un entier k tel que : $6^{40} - 1 = 11k$. Ainsi 5 divise $11k$. Comme 5 et 11 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss nous permet d'affirmer que 5 divise k : $k = 5k'$, avec k' entier. Finalement :

$6^{40} - 1 = 11 \times 5k' = 55k'$. Le résultat est établi.

Remarque : les entiers 5 et 11 étant premiers entre eux, on peut aussi directement conclure. Plus généralement rappelons que si chacun des entiers a_1, a_2, \dots, a_n divise un entier n donné et que ces entiers sont deux à deux premiers entre eux alors leur produit divise n .

$$55 \text{ divise } 6^{40} - 1.$$

Question 2.a.

On a : $65x - 40y = 1 \Leftrightarrow 5(13x - 8y) = 1$. Cette égalité ne peut être vérifiée puisque 1 n'est pas un multiple de 5.

Question 2.b.

17 est un nombre premier et 40 n'est pas un multiple de 17 ; On en conclut immédiatement que 17 et 40 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe donc deux entiers u et v tels que : $17u + 40v = 1$. On en tire immédiatement que le couple $(u ; -v)$ est solution de l'équation (E') .

L'équation (E') admet au moins une solution.

Question 2.c.

On a :

$$40 = 17 \times 2 + 6$$

$$17 = 6 \times 2 + 5$$

$$6 = 5 \times 1 + 1$$

$$\text{donc : } 6 = 40 - 2 \times 17; 5 = 17 - 6 \times 2 = 17 - (40 - 2 \times 17) \times 2 = 5 \times 17 - 2 \times 40$$

$$1 = 6 - 5 = 40 - 2 \times 17 - (5 \times 17 - 2 \times 40) = -7 \times 17 - 40(-3)$$

Le couple $(-7; -3)$ est solution de l'équation (E') .

Question 2.d.

On a, en utilisant l'égalité $17 \times (-7) - 40 \times (-3) = 1$ obtenue à la question précédente :

$$17x - 40y = 1 \Leftrightarrow 17x - 40y = 17 \times (-7) - 40 \times (-3) \Leftrightarrow 17 \times (x + 7) = 40 \times (y + 3)$$

17 et 40 étant premiers entre eux, le théorème de GAUSS nous permet alors de conclure que 40 divise $x + 7$. Il existe donc un entier k tel que $x + 7 = 40k$, soit $x = -7 + 40k$.

$$\text{On a alors : } 17 \times (x + 7) = 40 \times (y + 3) \Leftrightarrow 17 \times 40k = 40 \times (y + 3) \Leftrightarrow y + 3 = 17k \Leftrightarrow y = -3 + 17k.$$

Ainsi, si $(x; y)$ est solution de l'équation (E') alors il existe un entier k tel que $x = -7 + 40k$ et $y = -3 + 17k$.

Réciproquement, on vérifie aisément que tout couple de la forme $(-7 + 40k; -3 + 17k)$ où k est un entier est solution de l'équation (E') .

Finalement : L'ensemble des solutions de l'équation (E') est : $\begin{cases} x = -7 + 40k \\ y = -3 + 17k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

On cherche maintenant un entier naturel x inférieur à 40 tel que $17x \equiv 1 [40]$.

Pour un tel entier, il existe donc un entier y tel que $17x = 1 + 40y$. Ainsi, le couple $(x; y)$ est solution de l'équation (E') . L'entier x est donc, d'après le résultat précédent, de la forme : $-7 + 40k$. Puisque l'on veut :

$$0 \leq x < 40, \text{ il vient : } 0 \leq -7 + 40k \leq 40 \Leftrightarrow \frac{7}{40} \leq k \leq \frac{47}{40}, \text{ le seul entier solution est } k = 1, \text{ d'où } x_0 = 33$$

L'unique entier naturel x_0 inférieur à 40 et tel que $17x_0 \equiv 1 [40]$ est 33.

Question 3.

Comme $a^{17} \equiv b [55]$ alors $(a^{17})^{33} = a^{17 \times 33} \equiv b^{33} [55]$.

Mais d'après la question précédente, on a : $17 \times 33 \equiv 1 [40]$, soit $17 \times 33 = 1 + 40k$ k étant un entier naturel (il ne peut être strictement négatif!).

$$\text{On a donc : } a^{17 \times 33} = a^{40k+1} = a^{40k} \times a \equiv b^{33} [55].$$

Par ailleurs, on a $a^{40} \equiv 1 [55]$. Il vient alors : $(a^{40})^k = a^{40k} \equiv 1^k [55]$, soit $a^{40k} \equiv 1 [55]$ et enfin $a^{40k} \times a \equiv a [55]$.

Finalement, de $a^{40k} \times a \equiv b^{33} [55]$ et $a^{40k} \times a \equiv a [55]$, on tire immédiatement : $b^{33} \equiv a [55]$.

Le résultat est établi. Pour tout entier naturel a , si $a^{17} \equiv b [55]$ et si $a^{40} \equiv 1 [55]$ alors $b^{33} \equiv a [55]$.

Pour tout entier naturel a , si $a^{17} \equiv b [55]$ et si $a^{40} \equiv 1 [55]$ alors $b^{33} \equiv a [55]$.

