

# BACCALAUREAT BLANC

*Votre argumentation devra être claire, complète et concise.  
Votre présentation devra être soignée : écriture lisible, résultats encadrés.  
Chaque exercice commencera en haut d'une page.*

*Les candidats traiteront 4 exercices. Le 3<sup>ème</sup> exercice dépend de la spécialité choisie.*

*Les calculatrices sont autorisées.*

## Exercice 1. (4 points)

Le plan (P) complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité 2 cm.

On appelle  $(\Gamma)$  le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On appelle f l'application de plan (P) privé du point O dans (P) qui à tout point M différent de O d'affixe z associe le point  $M' = f(M)$  d'affixe  $z'$  définie par

$$z' = z + i - \frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives  $a = i$  et  $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$  et leurs images A' et B' par f d'affixes  $a'$  et  $b'$ .

- Calculer  $a'$  et  $b'$ .
- Placer les points A, A', B et B'.
- Conjecturer et démontrer la nature du triangle OBB'.

2. On recherche l'ensemble (E) des points du plan(P) privé du point O qui ont pour image par l'application f, le point O.

a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

- En déduire les affixes des points de l'ensemble (E) et donner une forme exponentielle de chacun d'eux.
- Démontrer que les points de l'ensemble (E) appartiennent à l'ensemble  $(\Gamma)$ .

Exercice 2. (6 points)

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

**Partie A.**

On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
2. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$ .  
Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
3. En déduire le signe de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .

**Partie B.**

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier strictement positif par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	$i$ et $n$ sont des entiers naturels. $u$ est un réel
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de $n$ .
Initialisation :	Affecter à $u$ la valeur 0.
Traitement :	Pour $i$ allant de 1 à $n$ .     Affecter à $u$ la valeur $u + \frac{1}{i}$   Fin du pour.
Sortie :	Afficher $u$ .

Donner la valeur exacte affichée par l'algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur  $n = 3$ .

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de  $u_n$  lorsque l'utilisateur entre la valeur de  $n$ .
3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à  $10^{-3}$ .

$n$	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
$u_n$	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

A l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et son éventuelle convergence.

### Partie C.

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite  $(u_n)$  telle que pour tout entier strictement positif  $n$ ,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où  $f$  est la fonction définie dans la partie A.

En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

2. a. Soit  $k$  un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité

$$\int_k^{k+1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$$

En déduire que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

Démontrer l'inégalité

$$\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} \quad (1)$$

b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement  $k$  par  $1, 2, \dots, n$  et démontrer que pour tout entier strictement positif  $n$ ,

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif  $n$ ,  $u_n > 0$ .

3. Prouver que la suite  $(u_n)$  est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

**Exercice 3.** (5 points)

*Uniquement pour ceux qui n'ont pas suivi l'enseignement de spécialité.*

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le  $n$ -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le  $n$ -ième sondage est positif » est noté  $V_n$ , on note  $p_n$  la probabilité de l'évènement  $V_n$ .

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire :  $p_1 = 1$ .

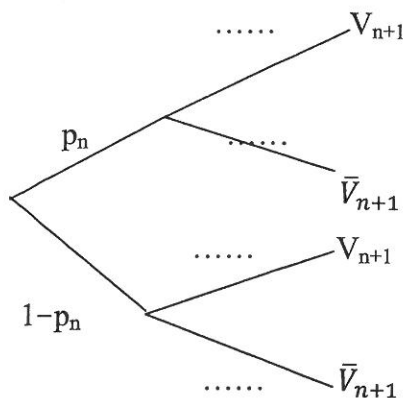
1. Calculer les probabilités des évènements suivants :

- A : « les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> sondages sont positifs » ;
- B : « les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité  $p_3$  pour que le 3<sup>e</sup> sondage soit positif.

3.  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, établir que :  $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$ .

5. On note  $u$  la suite définie, pour tout entier naturel  $n$  non nul par :  $u_n = p_n - 0,2$ .

- Démontrer que  $u$  est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
- Exprimer  $p_n$  en fonction de  $n$ .
- Calculer la limite, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , de la probabilité  $p_n$ .

Exercice 3. (5 points)

*Uniquement pour ceux qui ont suivi l'enseignement de spécialité.*

1.
  - a. Quel est le reste de la division euclidienne de  $6^{10}$  par 11 ? Justifier.
  - b. Quel est le reste de la division euclidienne de  $6^4$  par 5 ? Justifier.
  - c. En déduire que  $6^{40} \equiv 1 [11]$  et que  $6^{40} \equiv 1 [5]$ .
  - d. Démontrer que  $6^{40} - 1$  est divisible par 55.

2. Dans cette question  $x$  et  $y$  désignent des entiers relatifs.

a. Montrer que l'équation

$$(E) \quad 65x - 40y = 1$$

n'a pas de solution.

b. Montrer que l'équation

$$(E') \quad 17x - 40y = 1$$

admet au moins une solution.

c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation  $(E')$ .

d. Résoudre l'équation  $(E')$ .

En déduire qu'il existe un unique naturel  $x_0$  inférieur à 40 tel que  $17x_0 \equiv 1 [40]$ .

3. Pour tout entier naturel  $a$ , démontrer que si  $a^{17} \equiv b [55]$  et si  $a^{40} \equiv 1 [55]$ , alors  $b^{33} \equiv a [55]$ .

Exercice 4. (5 points)

SABCD est une pyramide à base carrée telle que les triangles ABS et ADS sont rectangles isocèles en A. I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [AD] et [SC].

I. Le but de cette partie est de construire la trace de la section de la pyramide SABCD par le plan (IJK). On complétera la figure au fur et à mesure des questions.

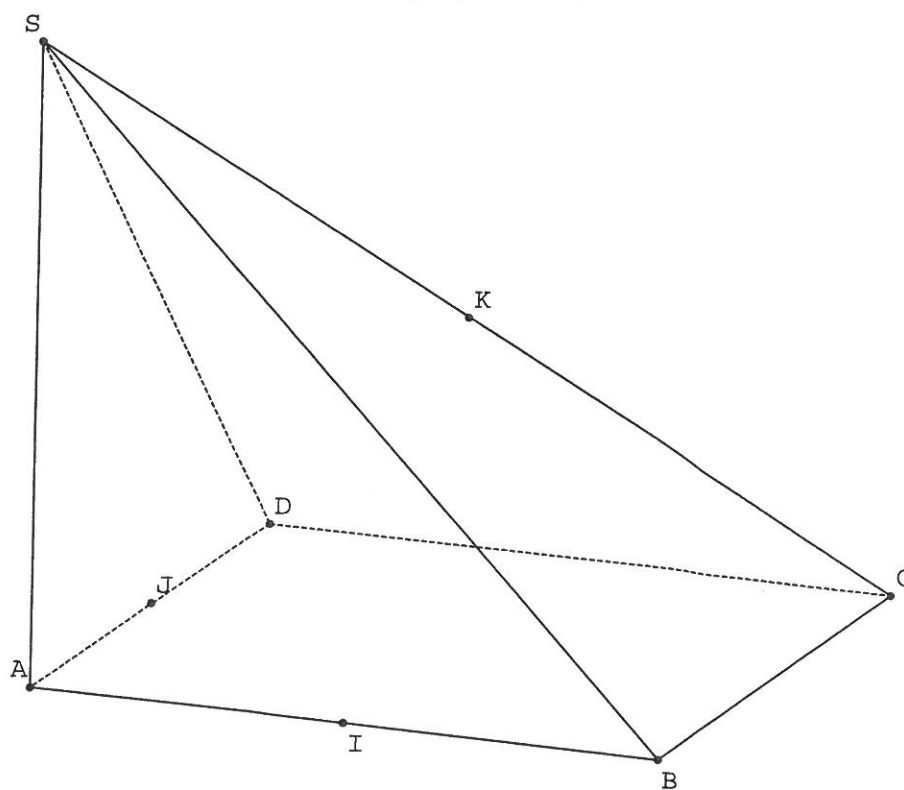
- a) Montrer que les droites (IJ) et (BC) sont sécantes en un point M.
- b) Montrer que les droites (KM) et (SB) sont sécantes en un point N.
- c) En déduire la trace de la section des (BCS) et (ABS) par le plan (IJK).
- d) Déterminer de même le point P, intersection du plan (IJK) et du segment [SD].
- e) Déterminer la trace de la section de la pyramide SABCD par le plan (IJK).

II. Le but de cette partie est de déterminer les positions des points N et P respectivement sur [SB] et [SD]. On se place dans le repère orthonormé  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$ .

- a) Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
- b) En déduire une équation du plan (IJK).
- c) Donner une représentation paramétrique de la droite (SB).
- d) En déduire les coordonnées du point N et vérifier que  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BS}$ .
- e) Déterminer de même la position du point P sur le segment [SD].

Nom :  
Prénom :  
Classe :

**Annexe de l'exercice 4 à rendre avec la copie.**



A détacher du sujet et à rendre avec votre copie.

