

La qualité de la rédaction (clarté, rigueur, justifications) tiendra une part importante dans la notation.

**Exercice 1 : (5 points) (commun à tous les candidats)**

1. On se propose de résoudre l'équation du troisième degré dans  $\mathbb{C}$  :

$$z^3 + \left(-\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z^2 + \left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z - \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i = 0 \quad (E)$$

- a. Montrer que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$ ,

$$z^3 + \left(-\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z^2 + \left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z - \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i = \left(z^2 - z + \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)$$

- b. En déduire la résolution de (E). On donnera les solutions sous forme algébrique, puis exponentielle.
2. On considère les nombres complexes suivants :

$$z_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad z_B = \frac{2+i}{3-i} \quad z_C = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

- a. Déterminer le module et un argument de  $z_A$ .
- b. Ecrire  $z_B$  sous forme algébrique et démontrer que  $z_B = \bar{z}_A$ .
- c. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe  $z_B$ .
- d. Ecrire  $z_C$  sous forme algébrique.
3. On note  $Z$  le nombre complexe défini par  $Z = z_B z_C$ .
- a. Calculer le module et un argument du nombre complexe  $Z$ .
- b. Ecrire le nombre complexe  $Z$  sous forme algébrique.
- c. En déduire les valeurs exactes des nombres réels

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

**Exercice 2 : (5 points)(commun à tous les candidats)**

**Avertissement :** pour la limite en 0 de la question 1, partie A, on pourra au besoin utiliser le changement de variable:

$$X = \frac{1}{x}$$

**Partie A**

Soit  $f$  la fonction dérivable, définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x \ln(x).$$

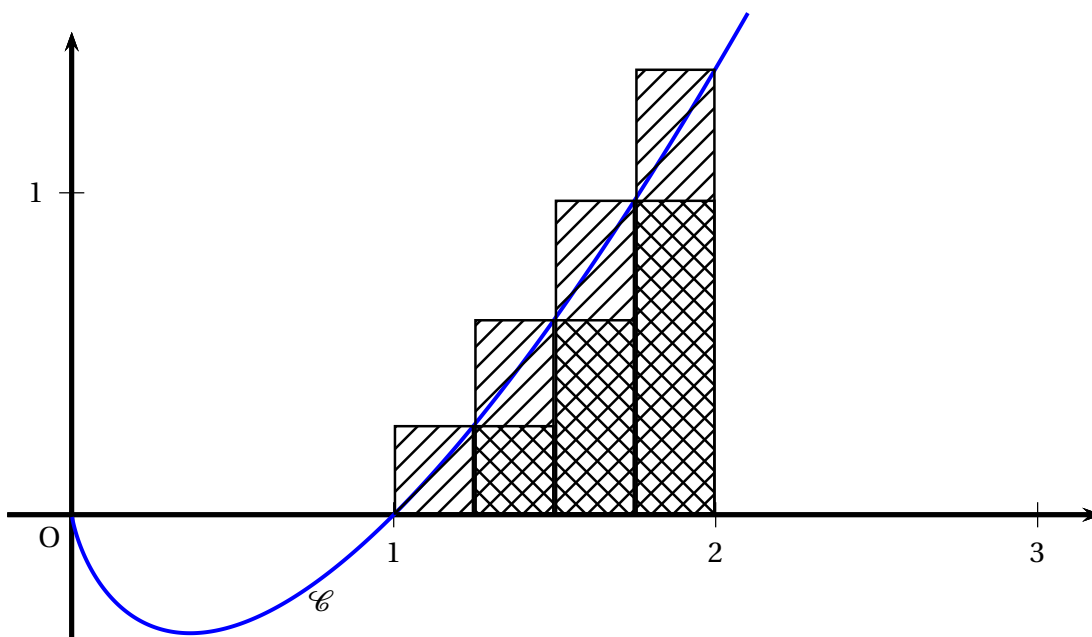
1. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. On appelle  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ . Montrer que  $f'(x) = \ln(x) + 1$ .
3. Déterminer les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Partie B**

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal.

Soit  $\mathcal{A}$  l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = 2$ .

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire  $\mathcal{A}$ . (voir la figure ci-après).



## Algorithme :

<b>Variables</b> $k$ et $n$ sont des entiers naturels $U, V$ sont des nombres réels
<b>Initialisation</b> $U$ prend la valeur 0 $V$ prend la valeur 0 $n$ prend la valeur 4
<b>Traitement</b> Pour $k$ allant de 0 à $n - 1$ Affecter à $U$ la valeur $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ Affecter à $V$ la valeur $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
<b>Affichage</b> Afficher $U$ Afficher $V$

- Que représentent  $U$  et  $V$  sur le graphique précédent ?
  - Quelles sont les valeurs  $U$  et  $V$  affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de  $U$  par défaut à  $10^{-4}$  près et une valeur approchée par excès de  $V$  à  $10^{-4}$  près) ?
  - En déduire un encadrement de  $\mathcal{A}$ .
- Soient les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies pour tout entier  $n$  non nul par :

$$U_n = \frac{1}{n} \left[ f(1) + f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \right]$$
$$V_n = \frac{1}{n} \left[ f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) + f(2) \right].$$

On admettra que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $U_n \leq \mathcal{A} \leq V_n$ .

- Trouver le plus petit entier  $n$  tel que  $V_n - U_n < 0,1$ .
- Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de  $\mathcal{A}$  d'amplitude inférieure à  $0,1$  ?

## Partie C

Soit  $F$  la fonction dérivable, définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

- Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- Calculer la valeur exacte de  $\mathcal{A}$ .

**Exercice 3 : (5 points)(commun à tous les candidats)**

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1<sup>er</sup> niveau, 75 vont au 2<sup>e</sup> niveau et 100 vont au 3<sup>e</sup> niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2<sup>e</sup> niveau, les autres vont au 1<sup>er</sup> niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.

On pourra considérer les évènements suivants :

- $N_1$  : « La personne va au premier niveau. »
- $N_2$  : « La personne va au deuxième niveau. »
- $N_3$  : « La personne va au troisième niveau. »
- $E$  : « La personne emprunte l'escalier. »

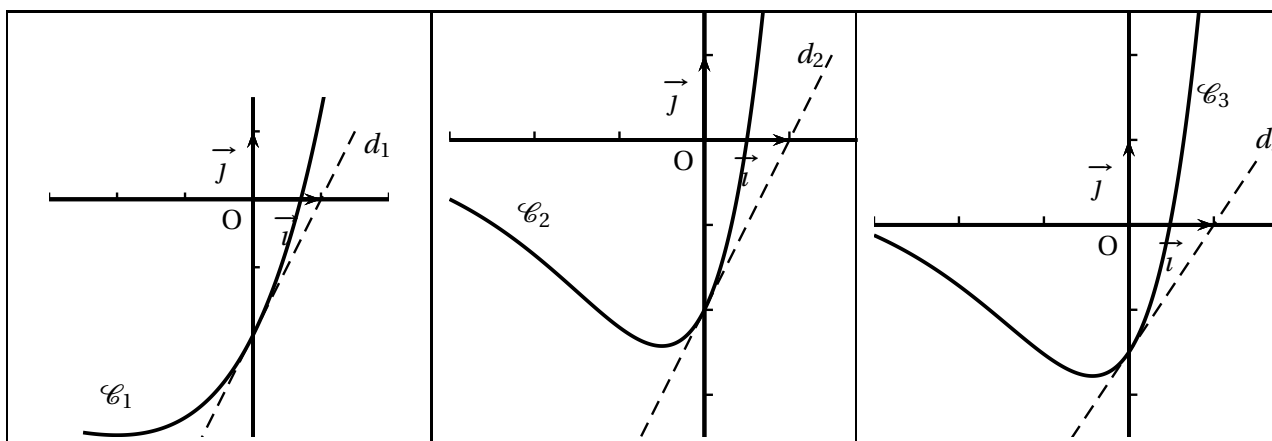
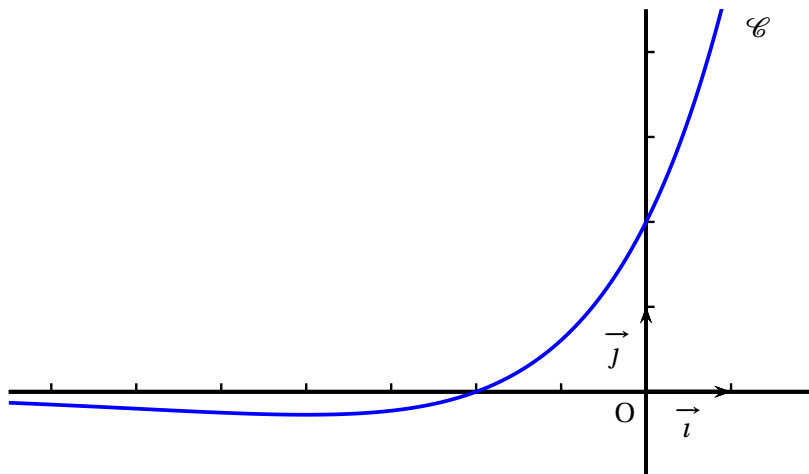
1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. **a.** Montrer que la probabilité que la personne aille au 2<sup>e</sup> niveau par l'escalier est égale à  $\frac{1}{12}$ .  
**b.** Montrer que les évènements  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  sont équiprobables.  
**c.** Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2<sup>e</sup> niveau.
3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.  
On appelle  $X$  la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2<sup>e</sup> niveau.  
**a.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .  
**b.** Déterminer, à  $10^{-4}$  près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2<sup>e</sup> niveau.  
**c.** En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2<sup>e</sup> niveau ?
4. Soit  $n$  un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais  $n$  personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.  
Déterminer le plus petit entier  $n$  strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un personne va au 2<sup>e</sup> niveau » soit supérieure ou égale à 0,99.

**Exercice 4 : (5 points)** (pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité)

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie A**

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe  $\mathcal{C}$  et trois autres courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



1. Donner par lecture graphique, le signe de  $f(x)$  selon les valeurs de  $x$ .
2. On désigne par  $F$  une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - a. À l'aide de la courbe  $\mathcal{C}$ , déterminer  $F'(0)$  et  $F'(-2)$ .
  - b. L'une des courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  est la courbe représentative de la fonction  $F$ . Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

**Partie B**

Dans cette partie, on admet que la fonction  $f$  évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe  $\mathcal{C}$  permet de conjecturer que la fonction  $f$  admet un minimum.
  - a. Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$ .
  - b. En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

a. Interpréter géométriquement le réel  $I$ .

b. Soient  $u$  et  $v$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = x$  et  $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ .  
Vérifier que  $f = 2(u'v + uv')$ .

c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale  $I$ .

**Exercice 4 : (5 points) (pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité)**

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers  $a$  et  $b$  l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées  $(x ; y)$  sont des entiers vérifiant les conditions :  $0 \leq x \leq a$  et  $0 \leq y \leq b$ . On note  $R_{a,b}$  ce réseau.

Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers  $x$  et  $y$  à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

**A - Représentation graphique de quelques ensembles**

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe n° 1 à rendre avec la copie.

Représenter graphiquement les points  $M(x ; y)$  du réseau  $R_{8,8}$  vérifiant :

1.  $x \equiv 2 \pmod{3}$  et  $y \equiv 1 \pmod{3}$ , sur le graphique 1 de la feuille annexe
2.  $x + y \equiv 1 \pmod{3}$ , sur le graphique 2 de la feuille annexe ;
3.  $x \equiv y \pmod{3}$ , sur le graphique 3 de la feuille annexe.

**B - Résolution d'une équation**

On considère l'équation (E) :  $7x - 4y = 1$ , où les inconnues  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs  $(x_0 ; y_0)$  solution de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution  $(x ; y)$  pour laquelle le point  $M(x ; y)$  correspondant appartient au réseau  $R_{4,7}$ .

**C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.**

Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale  $[OA]$  du réseau  $R_{a,b}$ , avec  $O(0 ; 0)$  et  $A(a ; b)$ .

1. Démontrer que les points du segment  $[OA]$  sont caractérisés par les conditions :

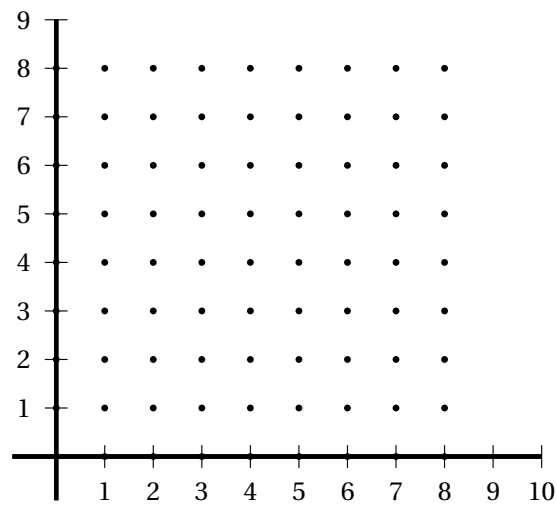
$$0 \leq x \leq a ; 0 \leq y \leq b ; ay = bx.$$

2. Démontrer que si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors les points  $O$  et  $A$  sont les seuls points du segment  $[OA]$  appartenant au réseau  $R_{a,b}$ .
3. Démontrer que si  $a$  et  $b$  ne sont pas premiers entre eux, alors le segment  $[OA]$  contient au moins un autre point du réseau.  
(On pourra considérer le pgcd  $d$  des nombres  $a$  et  $b$  et poser  $a = da'$  et  $b = db'$ .)

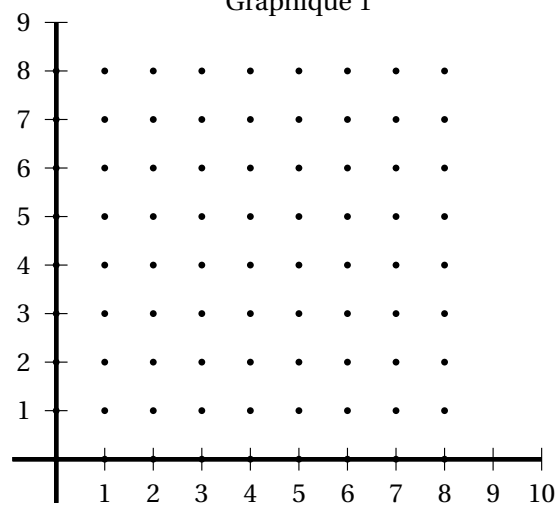
NOM :  
Prénom :

T°S

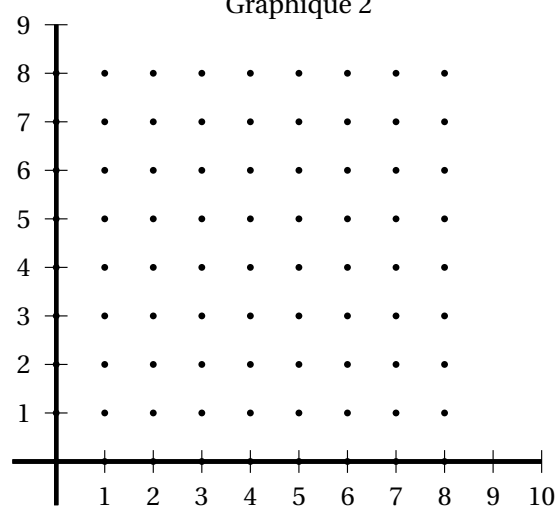
ANNEXE A RENDRE POUR LES ELEVES DE SPECIALITE



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3