

**Exercice 1**

1. On a d'abord (limite d'une fonction rationnelle) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{4x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Puis :  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ .

On en déduit alors (composition) :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}}$$

2. Pour tout  $x$  réel, on a :  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , d'où :  $0 \leq \sin x + 1 \leq 2$ .

Pour tout  $x$  réel strictement positif, on a  $2x > 0$  et il vient alors :  $0 \leq \frac{\sin x + 1}{2x} \leq \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

Comme :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , le théorème des gendarmes nous permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0}$$

3. On peut procéder de diverses façons.

Avec  $x$  positif différent de 1, on a :  $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}^2-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$ .

Comme :  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{1}$ , on a finalement :  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$ .

On pouvait aussi remarquer :  $h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}$ .

La fonction racine carrée est dérivable en 1 et  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$  n'est rien d'autre que la valeur

de son nombre dérivé en 1, soit :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ .

En inversant, on retrouve :  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ .

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2}$$

4. Remarquons que l'on a :  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 7x + 12) = 3^2 - 7 \times 3 + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$  et

$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$ . Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type «  $\frac{0}{0}$  ».

Comme précédemment, on peut procéder de diverses façons.

Par exemple, comme 3 est racine de  $x^2 - 7x + 12$ , on peut factoriser par  $x - 3$  et on obtient facilement :  $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$ .

Ainsi, pour tout réel  $x$  différent de 3, on a :  $\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x - 4)}{x - 3} = x - 4$ .

Il vient alors :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (x - 4) = 3 - 4 = -1$ .

On pouvait, une fois encore, reconnaître un taux d'accroissement : celui de la fonction polynôme  $x \mapsto x^2 - 7x + 12$  en 3 à droite. Or, cette fonction admet pour dérivée la fonction :  $x \mapsto 2x - 7$ . Pour  $x = 3$ , cette fonction prend la valeur :  $2 \times 3 - 7 = -1$ . On retrouve la valeur obtenue ci-dessus.

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} r(x) = -1}$$

5. On a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ . On en déduit, par composition :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} = +\infty$ . Par ailleurs, on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .

Nous avons donc affaire ici à une forme indéterminée du type : «  $\frac{\infty}{\infty}$  ».

Pour lever l'indétermination, la forme du numérateur nous conduit à, classiquement, factoriser. Pour tout réel  $x$  strictement négatif, on a :

$$s(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x + 1} = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{-x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = -\frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}}$$

On a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) = 1$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$ . Il vient donc (composition) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} = 1.$$

On a aussi :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ .

On en déduit (rapport) :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$  et, finalement :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) = -1}$$

## Exercice 2

1. La fonction  $x \mapsto \sqrt{\frac{2x-1}{x+15}}$  est continue pour toute valeur de  $x$  de son ensemble de définition (en l'occurrence  $]-\infty; -15[ \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ) comme composée de deux fonctions de référence : une fonction rationnelle et la fonction racine carrée. On a alors immédiatement :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{\frac{2x-1}{x+15}} = f(1) = \sqrt{\frac{2 \times 1 - 1}{1 + 15}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

Par ailleurs, on a :  $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3} - 2) = \sqrt{4} - 2 = 0$ . En 1 à droite, nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type : «  $\frac{0}{0}$  ».

Pour tout réel  $x$  strictement supérieur à 1, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{\sqrt{1+3} + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Comme :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1)$ , on en déduit finalement :

La fonction  $f$  est continue en 1.

2. En raisonnant à nouveau avec la fonction  $x \mapsto \sqrt{\frac{2x-1}{x+15}}$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2x-1}{x+15}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2 \times \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 15}} = \sqrt{0} = 0$$

On a aussi :  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}} (ax+3) = a \times \frac{1}{2} + 3 = \frac{a}{2} + 3.$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} & f \text{ continue en } \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow & 0 = \frac{a}{2} + 3 \\ \Leftrightarrow & \frac{a}{2} = -3 \\ \Leftrightarrow & a = -6 \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est continue en  $\frac{1}{2}$  si, et seulement si, on a :  $a = -6.$

3. On suppose dans cette question que l'on a :  $a = -6.$  La fonction  $f$  est donc continue en  $\frac{1}{2}.$

D'après la première question, elle est aussi continue en 1.

La fonction  $x \mapsto -6x + 3$  est une fonction affine. Elle est donc continue sur  $\mathbb{R}$  et, de fait sur l'intervalle  $\left[0; \frac{1}{2}\right[.$

A la première question, nous avons vu que la fonction  $x \mapsto \sqrt{\frac{2x-1}{x+15}}$  était continue en tout point de l'ensemble  $] -\infty; -15[ \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[.$  Elle l'est donc sur l'intervalle  $\left]\frac{1}{2}; 1\right[.$

Enfin, la fonction  $x \mapsto \sqrt{x+3}$  est définie et continue sur  $[-3; +\infty[$  comme composée de fonctions continues. Il en va donc de même de la fonction  $x \mapsto \sqrt{x+3} - 2.$  Cette fonction est donc continue sur l'intervalle  $]1; +\infty[.$

La fonction  $x \mapsto x - 1$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et donc sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  en tant que fonction polynôme.

Finalement, la fonction  $x \mapsto \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$  est définie et continue sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  comme rapport de deux fonction continues sur cet intervalle.

Comme, d'une part, la fonction  $f$  est continue sur les intervalles  $\left[0; \frac{1}{2}\right[ , \left]\frac{1}{2}; 1\right[$  et  $]1; +\infty[$  et comme, d'autre part, elle est continue en  $\frac{1}{2}$  et en 1, on en déduit :

La fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $[0; +\infty[.$

**Exercice 3**

1. Pour tout réel  $x$  de l'ensemble  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$  on a :

$$f'(x) = a - \frac{c}{(x+1)^2}$$

2. On utilise ici le fait que la dérivée  $f'$  s'annule pour  $x = -3$  et  $x = 1$ . En utilisant l'expression obtenue à la question précédente, on a :

$$f'(-3) = a - \frac{c}{(-3+1)^2} = a - \frac{c}{4} \text{ et } f'(1) = a - \frac{c}{(1+1)^2} = a - \frac{c}{4}$$

On a donc :  $f'(-3) = f'(1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a - \frac{c}{4} = 0}$ .

Par ailleurs, on a :  $f(-3) = -6$  et  $f(1) = 2$ .

Or,  $f(-3) = a \times (-3) + b + \frac{c}{-3+1} = -3a + b - \frac{c}{2}$  et  $f(1) = a \times 1 + b + \frac{c}{1+1} = a + b + \frac{c}{2}$ .

On a donc :  $f(-3) = -6 \Leftrightarrow \boxed{-3a + b - \frac{c}{2} = -6}$  et  $f(1) = 2 \Leftrightarrow \boxed{a + b + \frac{c}{2} = 2}$ .

On a ainsi obtenu le système :

$$\begin{cases} a - \frac{c}{4} = 0 \\ -3a + b - \frac{c}{2} = -6 \\ a + b + \frac{c}{2} = 2 \end{cases}$$

En raisonnant par équivalence, il vient :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a - \frac{c}{4} = 0 \\ -3a + b - \frac{c}{2} = -6 \\ a + b + \frac{c}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4a \\ -3a + b - \frac{4a}{2} = -6 \\ a + b + \frac{4a}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4a \\ -5a + b = -6 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4a \\ b = 5a - 6 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4a \\ b = 5a - 6 \\ 3a + 5a - 6 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4a \\ b = 5a - 6 \\ 8a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \times 1 \\ b = 5 - 6 \\ a = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ b = -1 \\ a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement :

Pour tout réel  $x$  de  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$ , on a :

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$$

3. On doit déterminer les limites de la fonction  $f$  à gauche en  $-1$  et en  $+\infty$ .

On utilise l'expression obtenue à la question précédente.

On a :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x+1) = 0^-$  et, de fait :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{4}{x+1} = -\infty$ .

Par ailleurs :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x-1) = -1-1 = -2$ .

On en déduit (somme) :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \left( x-1 + \frac{4}{x+1} \right) = -\infty$ .

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ . Par ailleurs :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$ .

On en déduit alors (somme) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x-1 + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

On a donc désormais :

|         |           |      |           |           |           |           |
|---------|-----------|------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $-1$      | $1$       | $+\infty$ |           |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$       | $0$       | $+$       |
| $f$     | $-\infty$ | $-6$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $2$       | $+\infty$ |

4. Pour tout  $x$  réel différent de  $-1$ , on a :

$$f(x) - (x-1) = x - 1 + \frac{4}{x+1} - (x-1) = \frac{4}{x+1}$$

Comme on l'a vu précédemment, on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x+1} = 0$ .

On en déduit ainsi :

La courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  admet comme asymptote la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x - 1$  au voisinage de  $+\infty$  et de  $-\infty$ .

Pour étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et de son asymptote  $\mathcal{D}$ , on étudie le signe de la différence  $f(x) - (x - 1)$ , c'est-à-dire le signe de  $\frac{4}{x+1}$ .

Le signe de  $\frac{4}{x+1}$  est celui de son dénominateur  $x+1$ . Il vient donc immédiatement :

- Si  $x+1 < 0$ , c'est-à-dire  $x < -1$ , on a  $f(x) - (x - 1) < 0$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située sous son asymptote  $\mathcal{D}$ .
- Si  $x+1 > 0$ , c'est-à-dire  $x > -1$ , on a  $f(x) - (x - 1) > 0$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessus de son asymptote  $\mathcal{D}$ .

Pour  $x < -1$ , la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située sous la droite  $\mathcal{D}$ .  
 Pour  $x > -1$ , la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessus de la droite  $\mathcal{D}$ .

5. On a :

$$|f(x) - (x - 1)| < 0,01 \Leftrightarrow \left| \frac{4}{x+1} \right| < 0,01 \Leftrightarrow \frac{4}{|x+1|} < 0,01$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{4}{0,01} < |x+1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 400 < |x+1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 400 < x+1 \text{ et } -400 > x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 399 < x \text{ et } -401 > x \end{cases}$$

Les conditions  $399 < x$  et  $-401 > x$  sont simultanément vérifiées en choisissant, par exemple,  $|x| > 401$ . Ainsi,  $A = 401$  convient (comme tout autre réel supérieur à 401 !).

On a donc :

$$|x| > 401 \Rightarrow |f(x) - (x - 1)| < 0,01$$

A titre de complément, nous fournissons page suivante une représentation graphique de la courbe  $\mathcal{C}_f$  (en bleu), de son asymptote  $\mathcal{D}$  (en rouge) et de l'asymptote verticale (en noir) d'équation  $x = -1$ .

