

Durée 2 heures.
Calculatrice COLLEGE autorisée.

Une attention particulière devra être portée à la clarté et à la précision de la rédaction, éléments entrant pour une part significative dans la notation chiffrée.

Le barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 – 7,5 points

Calculer les limites des fonctions suivantes aux endroits indiqués :

$$1. f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{4x+2}} \text{ en } -\infty ;$$

$$2. g(x) = \frac{\sin x + 1}{2x} \text{ en } +\infty ;$$

$$3. h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \text{ en } 1 ;$$

$$4. r(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x-3} \text{ en } 3 \text{ à droite ;}$$

$$5. s(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x+1} \text{ en } -\infty .$$

Exercice 2 – 5 points

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} ax+3 & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\\ \sqrt{\frac{2x-1}{x+15}} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

- Démontrer que f est continue en 1.
- Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en $\frac{1}{2}$?
- Montrer, pour la valeur de a trouvée à la question précédente, que la fonction f est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Exercice 3 – 7,5 points

Soit f une fonction dont le tableau de variation, incomplet, est le suivant ; on désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f .

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$		
f	$-\infty$	\nearrow	-6	\searrow	$+\infty$	\searrow	2	\nearrow

On admet que f est définie sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

Où a, b et c sont des réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a, b et c .
2. En vous aidant des informations contenues dans le tableau de variation ci-dessus déterminez les valeurs des réels a, b et c .
3. Déterminez, en justifiant, les limites manquantes dans le tableau de variation fourni.
4. Montrez que la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f admet comme asymptote la droite \mathcal{D} d'équation $y = x - 1$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
Etudiez la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de son asymptote \mathcal{D} .
5. Déterminez un réel A tel que :

$$|x| > A \Rightarrow |f(x) - (x-1)| < 0,01$$