

**Corrigé du DTL n° 1****Exercice 1**1. C'est **VRAI**.

La fonction  $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que composée de  $x \mapsto x^2+1$  qui est une fonction polynôme donc définie et continue sur  $\mathbb{R}$  et positive de surcroît par la fonction racine qui est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. C'est **FAUX**.

La fonction  $f : x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 6}{x^3 + 7}$  est une fonction rationnelle donc continue sur son ensemble de définition.

Or, elle est définie en 0 donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{6}{7}$ .

(La technique des termes de plus hauts degrés ne s'applique qu'aux limites en  $+\infty$  et  $-\infty$ ).

3. C'est **FAUX**.

Contre-exemple :  $f(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$  et  $g(x) = x$ .

Ces deux fonctions sont définies sur  $\mathbb{R}$  et vérifient les hypothèses désirées ( $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  et

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0$ ) mais  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$ .

4. C'est **FAUX**.

En effet, on ne sait pas si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+$  ou  $0^-$  (ou ni l'un, ni l'autre, ce qui est possible par exemple la fonction  $x \mapsto (-1)^{E(1/x)} x$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0 (évident par le théorème des gendarmes), mais ni vers  $0^+$ , ni vers  $0^-$  ...)

5. C'est **FAUX**.

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$  et  $\lim_{X \rightarrow 1} \sin X = \sin 1$  donc, par composition,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{x+1}{x}\right) = \sin 1$ .

6. C'est **FAUX**.

Contre-exemple :  $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ .

Cette fonction est définie et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  (c'est une fonction rationnelle donc dérivable

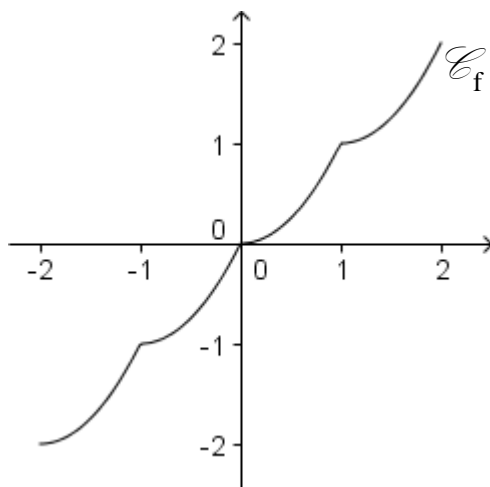
sur son ensemble de définition et de dérivée  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ ) mais  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

## Exercice 2

1. Les entiers contenus dans  $[-2; 2]$  sont  $-2, -1, 0, 1$  et  $2$  donc, sur  $[-2; 2]$ , les valeurs possibles de  $E(x)$  sont  $-2, -1, 0, 1$  et  $2$ . Etudions chaque possibilité :

- Si  $x \in [-2; -1[$ ,  $E(x) = -2$  et  $f(x) = (x+2)^2 - 2$  ;
- Si  $x \in [-1; 0[$ ,  $E(x) = -1$  et  $f(x) = (x+1)^2 - 1$  ;
- Si  $x \in [0; 1[$ ,  $E(x) = 0$  et  $f(x) = x^2$  ;
- Si  $x \in [1; 2[$ ,  $E(x) = 1$  et  $f(x) = (x-1)^2 + 1$  ;
- Si  $x = 2$ ,  $E(x) = 2$  et  $f(2) = 2$ .

2. Avec ce qui précède, on obtient la courbe :



3. La courbe de  $f$  pouvant être tracée sans lever le crayon suggère que  $f$  est continue sur  $[-2; 2]$ .

Sur chaque intervalle  $[-2; -1[$ ,  $]-1; 0[$ ,  $]0; 1[$  et  $]1; 2[$ ,  $f$  est une fonction trinôme donc elle est continue.

On a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} [(x+2)^2 - 2] = (-1+2)^2 - 2 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} [(x+1)^2 - 1] = (-1+1)^2 - 1 = -1 = f(-1).$$

Donc  $f$  est continue en  $-1$ .

De même :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 0 = f(0)$  donc  $f$  est continue en  $0$ .
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 1 = f(1)$  donc  $f$  est continue en  $1$ .
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = 2 = f(2)$  donc  $f$  est continue en  $2$ .

Finalement,  $f$  est continue en tout point de  $[-2; 2]$  donc :

$f$  est continue sur  $[-2; 2]$ .

**Exercice 3**

- La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{d\}$ . C'est une fonction rationnelle donc elle est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{d\}$  et donc admet une limite finie en tout réel différent de  $d$ . Or, pour que  $\mathcal{C}$  admette une asymptote verticale d'équation  $x = 3$ , il faut que la limite (éventuellement juste à gauche ou à droite) de  $f(x)$  en 3 soit infinie donc :

$$\boxed{d = 3}.$$

- On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x - d} = 0$  donc la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

Ceci implique que pour tout  $x$ ,  $ax + b = 2x - 5$  et donc que :

$$\boxed{a = 2} \text{ et } \boxed{b = -5}.$$

- Enfin, comme  $\mathcal{C}$  passe par le point  $A(1; 2)$ , on a  $f(1) = 2$ .

$$\text{Or, } f(1) = a + b + \frac{c}{1 - d} \text{ et avec les résultats précédents, on obtient } f(1) = 2 - 5 + \frac{c}{1 - 3} = -3 - \frac{c}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } -3 - \frac{c}{2} = 2 \text{ soit :}$$

$$\boxed{c = -10}.$$

Finalement :

$$\boxed{f(x) = 2x - 5 - \frac{10}{x - 3}}.$$

**Exercice 4**

Déjà,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  en tant que quotient de fonctions continues sur cet ensemble. Alors,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si elle est continue en 0, c'est-à-dire si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a$ .

En posant  $g(x) = \cos x$ , on remarque que :

$$f(x) = -2 \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}.$$

Or, la fonction cosinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (avec  $g'(x) = -\sin x$ ) et en particulier en 0, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = -\sin 0 = 0.$$

Ceci prouve (en multipliant par  $-2$ ) que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Finalement :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } a = 0}.$$

## Exercice 5

1. On a :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$  donc, par composition,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$  donc par somme :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty}.$$

- En  $+\infty$ , on a une forme indéterminée donc il faut magouiller.

On se précipite bien sûr sur la quantité conjuguée en écrivant,  $\forall x > 0$  :

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}.$$

On prouve comme plus haut que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = +\infty$  et donc en passant à l'inverse, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0}.$$

2. Remarquons déjà que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 1}$ . Or,  $x \leq |x| = \sqrt{x^2}$  donc  $x < \sqrt{x^2 + 1}$  soit :

$$\underline{g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x > 0}.$$

Cette inégalité implique entre autres que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{x^2 + 1} - x \neq 0$  et, pour établir la relation demandée, on peut à nouveau utiliser la technique de l'expression conjuguée.  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$g(x) + 2x = \sqrt{x^2 + 1} - x + 2x = \sqrt{x^2 + 1} + x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$$

Soit :

$$\boxed{g(x) + 2x = \frac{1}{g(x)}}.$$

On a vu que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{g(x)} = 0.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\text{La droite } (d) \text{ d'équation } y = -2x \text{ est bien asymptote à la courbe } \mathcal{C}_g \text{ en } -\infty}.$$

On a vu plus haut que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) > 0$  donc  $g(x) + 2x = \frac{1}{g(x)} > 0$ , ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La courbe } \mathcal{C}_g \text{ est toujours au dessus de la droite } (d)}.$$

3. On a vu que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  donc  $\mathcal{C}_g$  admet une seconde asymptote, horizontale cette fois : l'axe des abscisses en  $+\infty$ .