

Durée 2 heures.
Calculatrice COLLEGE autorisée.

Une attention particulière devra être portée à la clarté et à la précision de la rédaction, éléments entrant pour une part significative dans la notation chiffrée.

La barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 - 3 points

Préciser (on *recopiera et complétera le tableau ci-dessous sur la copie*), pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse (*aucune justification n'est demandée*) :

1. Pour tout réel a : $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{a^2 + 1}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + 6}{x^3 + 7} = 1$;
3. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et si $f(x) > g(x)$ pour tout x réel alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = +\infty$;
4. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = +\infty$;
5. La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{x+1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en $+\infty$;
6. Si la fonction f est définie et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | | | | | |

Exercice 2 – 5 points

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 2]$ par :

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

1. Exprimer $f(x)$ sous forme de polynômes suivant les valeurs de x ;
2. Tracer la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f dans un repère ;
3. Etudier, en justifiant, la continuité de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 2]$.

Exercice 3 – 3 points

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$$

Où a, b, c et d sont des réels. On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère.

Déterminer les réels a, b, c et d sachant que :

- La courbe \mathcal{C} admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 3$;
- La courbe \mathcal{C} admet pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ la droite d'équation $y = 2x - 5$;
- La courbe \mathcal{C} passe par le point $A(1;2)$

Exercice 4 – 3 points

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-2\cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminer, en justifiant, la valeur du réel a de sorte que la fonction f soit continue sur \mathbb{R} .

Exercice 5 – 6 points

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$$

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$;
2. Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} , on a : $g(x) + 2x = \frac{1}{g(x)}$.

En déduire que la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C}_g de la fonction g . Préciser la position de \mathcal{C}_g par rapport à (d) ;

3. La courbe \mathcal{C}_g admet-elle une seconde asymptote ?