

Durée 2 heures.
La calculatrice graphique est autorisée.

Une attention particulière devra être portée à la clarté et à la précision de la rédaction, éléments entrant pour une part significative dans la notation chiffrée.

La barème est fourni à titre indicatif.

« Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles, que nous n'osons pas.
C'est parce que nous n'osons pas, que les choses sont difficiles. »
SENEQUE

Exercice 1

Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x}$$

Correction

→ 1^{ère} approche

On va utiliser une relation trigonométrique fondamentale pour retrouver une limite classique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$$

On a alors, pour tout x réel non nul :

$$\frac{\cos^2 x - 1}{x} = \frac{-\sin^2 x}{x} = -\sin x \times \frac{\sin x}{x}$$

Comme : $\lim_{x \rightarrow 0} (-\sin x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, il vient, par multiplication :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sin x \times \frac{\sin x}{x} \right) = 0$$

Finalelement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x} = 0$$

→ 2^{ème} approche

On peut identifier cette limite comme un nombre dérivé.

Si on introduit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \cos^2(x)$, on a, pour tout x non nul :

$$\frac{\cos^2 x - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

La fonction f est dérivable comme composée de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} (la fonction cosinus et la fonction carrée) et on a pour tout x réel : $f'(x) = -2 \cos(x) \sin(x) = -\sin(2x)$.

Il vient alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x} = f'(0) = -2 \sin(2 \times 0) = -2 \sin(0) = 0$. On a ainsi retrouvé le résultat obtenu précédemment.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + x$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;
2. Montrer que l'on a : $f(x) - 2x = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x}$. En déduire que la courbe représentative \mathcal{C}_f de f admet en $+\infty$ une asymptote dont on précisera une équation. Déterminer la position de \mathcal{C}_f par rapport à l'asymptote.
3. En utilisant la question précédente, donner une valeur approchée de $f(10)$. Quelle est l'erreur (exprimée en pourcentage) commise ?
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. En déduire que la courbe représentative \mathcal{C}_f de f admet en $-\infty$ une asymptote dont on précisera une équation. Déterminer la position de \mathcal{C}_f par rapport à l'asymptote.

Correction

1. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

On en déduit, par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} = +\infty$.

Par ailleurs, on a immédiatement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Par addition, il vient alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} + x) = +\infty$.

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

2. Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - 2x &= \sqrt{x^2 + 2} + x - 2x = \sqrt{x^2 + 2} - x \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 2} + x)}{\sqrt{x^2 + 2} + x} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 2}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \frac{x^2 + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} \end{aligned}$$

On a bien, pour tout x réel :

$$\boxed{f(x) - 2x = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x}}$$

Remarquons que l'on peut écrire le résultat précédent sous la forme : $f(x) - 2x = \frac{2}{f(x)}$.

D'après la première question, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit alors, par division :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{f(x)} = 0 = f(x) - 2x$$

C'est-à-dire :

La courbe représentative \mathcal{C}_f de f admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation :
 $y = 2x$

Pour déterminer la position de \mathcal{C}_f par rapport à son asymptote, il convient d'étudier le signe de la différence : $f(x) - 2x$. Nous avons vu que celle-ci valait : $\frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x}$.

Le numérateur étant strictement positif, le signe de cette expression est celui du dénominateur.

Pour tout x réel, on a : $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 2 \geq 2 > 0$ et enfin : $\sqrt{x^2 + 2} > 0$.

- Pour $x \geq 0$, il vient alors : $x + \sqrt{x^2 + 2} > \sqrt{x^2 + 2} > 0$. Le dénominateur est strictement positif et il en va de même pour $\frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x}$;
- Pour $x < 0$, on peut écrire : $\sqrt{x^2 + 2} + x = \sqrt{x^2 + 2} - |x|$. Nous avons cette fois affaire à une différence de deux termes strictement positifs. Pour connaître le signe de cette différence, il suffit de comparer les termes. Puisqu'ils sont strictement positifs, nous pouvons comparer leurs carrés :

$$\sqrt{x^2 + 2}^2 = x^2 + 2 \text{ et } |x|^2 = x^2$$

On a immédiatement : $\sqrt{x^2 + 2}^2 > |x|^2$ et on en tire : $\sqrt{x^2 + 2} > |x|$, soit

$\sqrt{x^2 + 2} - |x| > 0$. Ici encore le dénominateur est strictement positif. Il en va de même pour $\frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x}$.

Finalement, pour tout x réel : $f(x) - 2x > 0$. D'où :

La courbe représentative \mathcal{C}_f de f est située au dessus de l'asymptote oblique d'équation $y = 2x$.

3. L'existence de l'asymptote oblique en $+\infty$ nous permet d'écrire :

$$f(10) \approx 2 \times 10 = 20$$

Par ailleurs, l'écart entre cette valeur approchée et la valeur exacte s'écrit :

$$f(10) - 20 = \frac{2}{\sqrt{10^2 + 2} + 10} = \frac{2}{\sqrt{102} + 10}$$

L'erreur relative commise s'écrit alors :

$$\frac{20 - f(10)}{f(10)} = \frac{20}{f(10)} - 1 = \frac{20}{\sqrt{102} + 10} - 1 \approx -0,005 = -0,5\%$$

A l'aide de l'asymptote, on obtient 20 comme valeur approchée de $f(10)$ et il s'agit d'une valeur par défaut. On commet ainsi une erreur d'environ $-0,5\%$.

4. On a encore : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2} = +\infty$. Par ailleurs, on a cette fois : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$. On a donc affaire à une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».
Pour la lever, nous écrivons (utilisation de la forme conjuguée) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + 2} + x = \frac{(\sqrt{x^2 + 2} + x)(\sqrt{x^2 + 2} - x)}{\sqrt{x^2 + 2} - x} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 2}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = \frac{x^2 + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2} - x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} - x} \end{aligned}$$

On a encore (par composition) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2} = +\infty$.

Par ailleurs, on a immédiatement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$.

Par addition, il vient alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) = +\infty$, puis : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = 0$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}$$

La courbe représentative de la fonction f admet donc en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Pour étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote, nous devons étudier le signe de ... $f(x) - 0$, c'est-à-dire de $f(x)$!

D'après la définition de f et le calcul mené ci-dessus, nous avons :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + x = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} - x}$$

On a : $f(0) = \sqrt{2}$ qui est strictement positif.

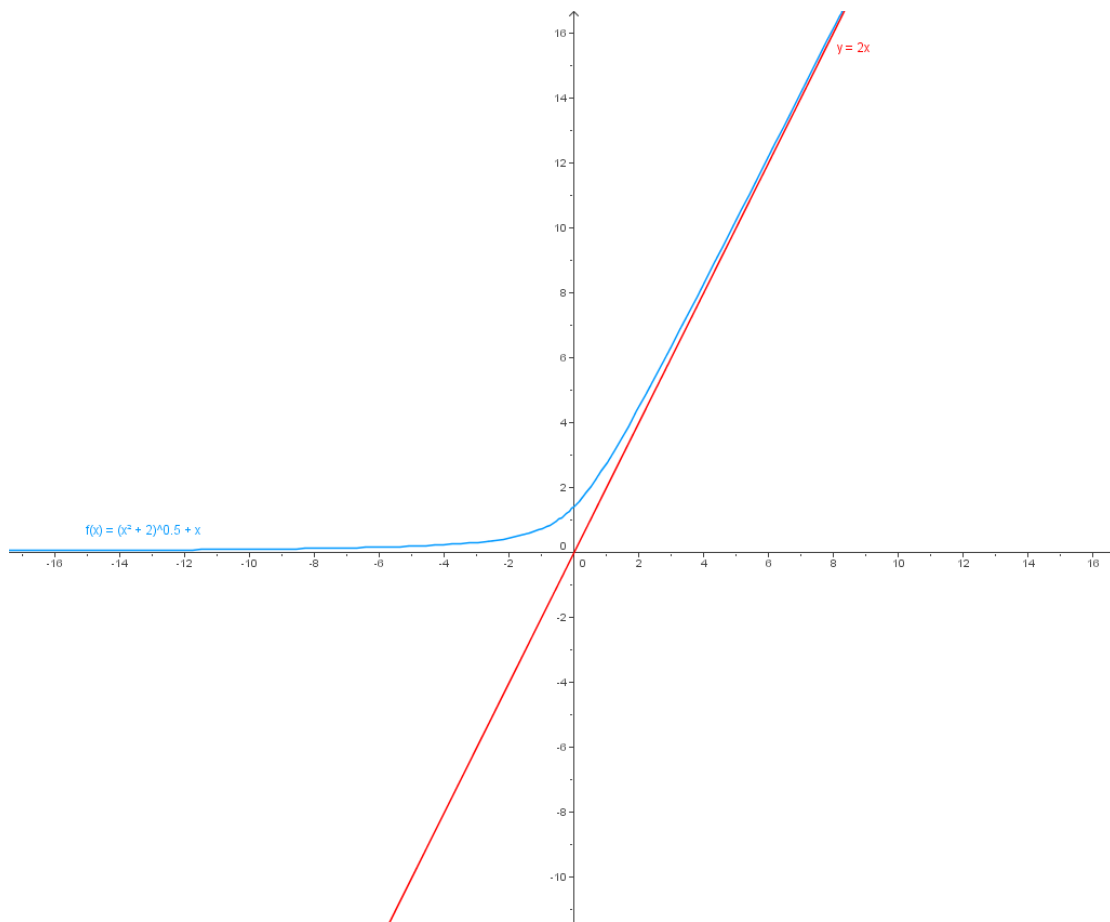
Pour tout x réel, on a également : $\sqrt{x^2 + 2} \geq 2 > 0$. On en déduit :

- Pour tout x réel strictement positif, $\sqrt{x^2 + 2} + x > \sqrt{2} > 0$;
- Pour tout x réel strictement négatif, $\sqrt{x^2 + 2} - x > \sqrt{2} > 0$ et donc $\frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} - x} > 0$.

En définitive, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

La courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f est située au-dessus de l'asymptote d'équation $y = 0$ pour tout x réel.

A titre de complément, nous fournissons ci-après une représentation graphique de f et de l'asymptote d'équation $y = 2x$ (en rouge), l'asymptote d'équation $y = 0$ correspondant à l'axe des abscisses.



Exercice 3

On se propose de déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} \times \left(\cos^2 x - \frac{4}{\cos x + 3} \right) \right]$$

1. A quel type de forme indéterminée a-t-on affaire ?
2. Montrer que l'on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (on utilisera : $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$);
3. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.
En remarquant que l'on a : $f(-2) = 0$, factoriser $f(x)$.
En déduire une factorisation de $\cos^3 x + 3 \cos^2 x - 4$;
4. En utilisant les résultats précédents, déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} \times \left(\cos^2 x - \frac{4}{\cos x + 3} \right) \right]$.

Correction :

1. On a immédiatement : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$. On en tire : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\cos x + 3} = \frac{4}{1+3} = 1$.

On a également : $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$ et donc (par composition) : $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1$.

Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos^2 x - \frac{4}{\cos x + 3} \right) = 1 - 1 = 0$.

On a donc affaire ici à une forme indéterminée du type « $+\infty \times 0$ ».

2. Pour tout réel x non nul :

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right)}{x^2} = 2 \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2} = 2 \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{4 \times \left(\frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$ et, classiquement : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Enfin : $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$.

On obtient donc, par composition : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1$.

Finalement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

3. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$. On a bien $f(-2) = 0$. La fonction f étant une fonction polynôme, on peut donc mettre $x + 2$ en facteur et il vient : $f(x) = (x + 2)(x^2 + ax + b)$.

(le coefficient de x^2 a immédiatement été choisi égal à 1 car celui de x^3 dans l'expression de f est égal à 1)

On a alors, pour tout x réel : $(x + 2)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a + 2)x^2 + (2a + b)x + 2b$.

Par identification, on obtient alors le système :

$$\begin{cases} a + 2 = 3 \\ 2a + b = 0 \\ 2b = -4 \end{cases}$$

La première équation donne : $a = 1$, la troisième : $b = -2$. On constate alors que la seconde équation est bien vérifiée.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x+2)(x^2 + x - 2)$.

1 est racine évidente de $x^2 + x - 2$ et on obtient : $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2}$$

On a alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \cos^3 x + 3\cos^2 x - 4 = (\cos x - 1)(\cos x + 2)^2}$$

4. Pour tout x réel non nul, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \times \left(\cos^2 x - \frac{4}{\cos x + 3} \right) &= \frac{1}{x^2} \times \frac{\cos^2 x (\cos x + 3) - 4}{\cos x + 3} = \frac{1}{x^2} \times \frac{\cos^3 x + 3\cos^2 x - 4}{\cos x + 3} \\ &= \frac{1}{x^2} \times \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 2)^2}{\cos x + 3} = -\frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{(\cos x + 2)^2}{\cos x + 3} \end{aligned}$$

En tenant compte de $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, on a facilement (addition) : $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + 2) = 3$ et

$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + 3) = 4$. Il vient alors (composition) : $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + 2)^2 = 9$.

En tenant compte du résultat de la première question, il vient enfin :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} \times \left(\cos^2 x - \frac{4}{\cos x + 3} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{(\cos x + 2)^2}{\cos x + 3} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{9}{4} \\ &= -\frac{9}{8} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} \times \left(\cos^2 x - \frac{4}{\cos x + 3} \right) \right] = -\frac{9}{8}}$$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x + 5 \sin x}{x-1}$$

1. Montrer que pour tout x réel strictement supérieur à 1 on a : $\frac{2x-5}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x+5}{x-1}$;
2. Dédire de la question précédente : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;
4. Reprendre la question 1 avec la fonction f_a définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f_a(x) = \frac{2x + a \sin x}{x-1}$ où a est un réel non nul fixé.

Correction :

1. Pour tout x réel, on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$ et donc : $-5 \leq 5 \sin x \leq 5$.
D'où : $2x-5 \leq 2x+5 \sin x \leq 2x+5$.

Pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a : $x-1 > 0$. La double inégalité précédente donne alors : $\frac{2x-5}{x-1} \leq \frac{2x+5 \sin x}{x-1} \leq \frac{2x+5}{x-1}$, soit, finalement :

$$\boxed{\frac{2x-5}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x+5}{x-1}}$$

2. Les fonctions $x \mapsto \frac{2x-5}{x-1}$ et $x \mapsto \frac{2x+5}{x-1}$ sont rationnelles. On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2}$$

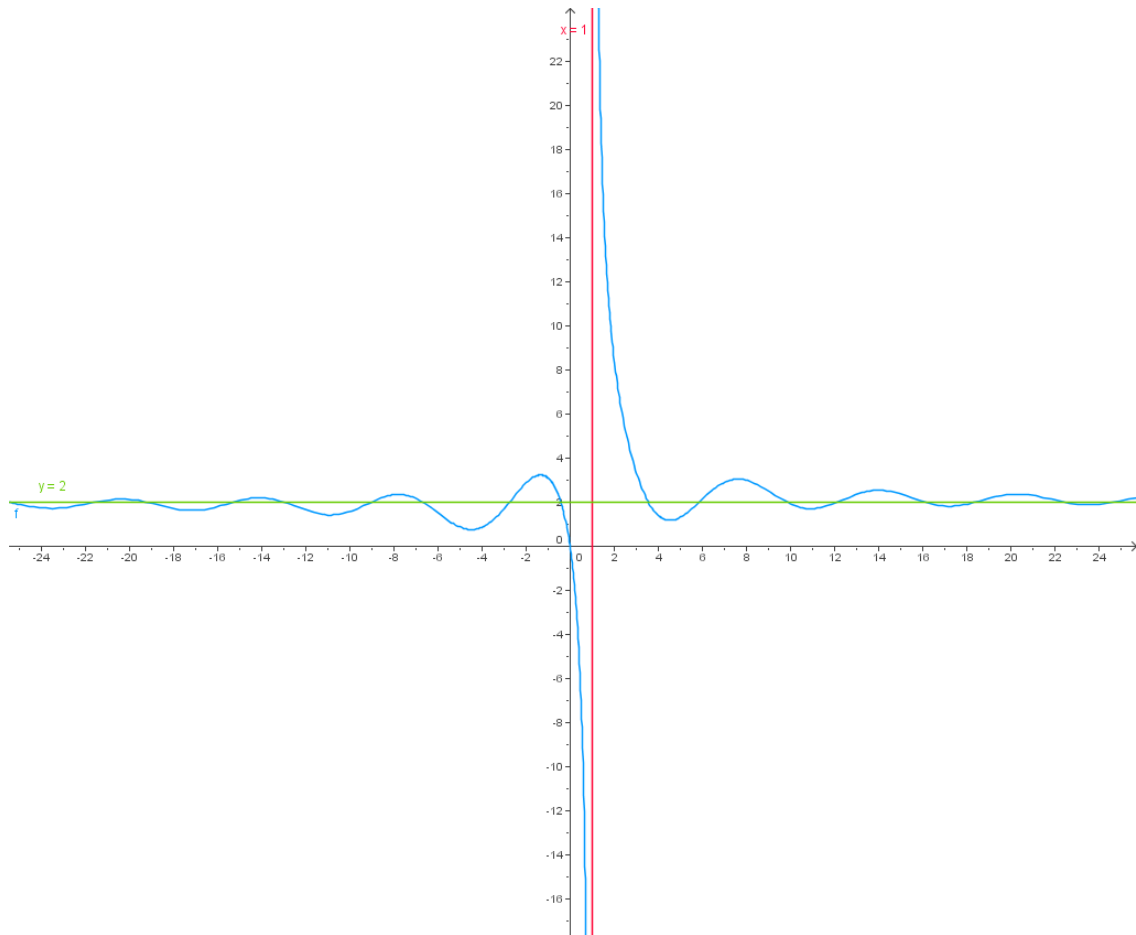
3. On reprend la démarche de la question 1. On a encore : $2x-5 \leq 2x+5 \sin x \leq 2x+5$.

Pour tout réel x strictement inférieur à 1, on a cette fois : $x-1 < 0$. La double inégalité précédente donne alors : $\frac{2x-5}{x-1} \geq \frac{2x+5 \sin x}{x-1} \geq \frac{2x+5}{x-1}$, soit $\frac{2x-5}{x-1} \geq f(x) \geq \frac{2x+5}{x-1}$.

On a encore : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$ et, finalement, toujours grâce au théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2}$$

A titre de complément, nous fournissons ci-après une représentation graphique de la fonction f et de ces deux asymptotes (d'équations $x = 1$ (en rouge) et $y = 2$ (en vert)).



4. On considère dans cette question la fonction f_a définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f_a(x) = \frac{2x + a \sin x}{x-1}$$

Pour tout x réel, on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$. Pour obtenir un encadrement de $a \sin x$, on peut distinguer deux cas suivant que a est strictement positif (on obtient $-a \leq a \sin x \leq a$) ou strictement négatif (on obtient $a \leq a \sin x \leq -a$). Mais on peut également écrire directement : $-|a \sin x| \leq a \sin x \leq |a \sin x|$, soit : $-|a| |\sin x| \leq a \sin x \leq |a| |\sin x|$. On en tire alors immédiatement : $-|a| \leq a \sin x \leq |a|$.

Pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a : $x-1 > 0$. La double inégalité précédente donne alors : $\frac{2x-|a|}{x-1} \leq \frac{2x+a \sin x}{x-1} \leq \frac{2x+|a|}{x-1}$, soit, finalement :

$$\boxed{\frac{2x-|a|}{x-1} \leq f_a(x) \leq \frac{2x+|a|}{x-1}}$$

Les fonctions $x \mapsto \frac{2x-|a|}{x-1}$ et $x \mapsto \frac{2x+|a|}{x-1}$ sont rationnelles. On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-|a|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+|a|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = 2}$$

La limite ne dépend donc pas du paramètre a .

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f : x \mapsto [6 - E(x) \times x] \times [x - E(x)]$$

Etudier la continuité de f sur \mathbb{R} .

Correction :

Considérons un entier k et travaillons, dans un premier temps sur l'intervalle $[k, k+1[$.

Pour tout x d'un tel intervalle, on a : $E(x) = k$ et, de fait :

$$f(x) = (6 - k \times x) \times (x - k) = -kx^2 + (k^2 + 6)x - 6k$$

Sur l'intervalle considéré, la fonction f est polynômiale et donc continue (f est continue à droite en k).

Il convient donc, maintenant, d'étudier la continuité en k .

D'après ce qui précède, on a immédiatement : $\lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x > k}} f(x) = f(k) = 0$.

Il convient maintenant d'étudier $\lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x < k}} f(x)$.

Pour travailler ainsi à gauche de k , considérons l'intervalle $[k-1, k[$.

Pour tout x de cet intervalle, on a cette fois $E(x) = k-1$ et :

$$f(x) = (6 - (k-1) \times x) \times (x - (k-1))$$

Il vient alors : $\lim_{\substack{x \rightarrow k \\ x < k}} f(x) = (6 - (k-1) \times k) \times (k - (k-1)) = 6 - (k-1) \times k = -k^2 + k + 6$.

Ainsi, la fonction f sera continue en k si, et seulement si, on a : $-k^2 + k + 6 = f(k) = 0$.

L'équation $-k^2 + k + 6 = 0$ admet comme solution -2 et 3 .

Finalement :

La fonction f est continue sur tout intervalle de la forme $[k, k+1[$ où $k \in \mathbb{Z}$. Elle est discontinue en tout k entier différent de -2 et 3 (elle est donc continue sur $[-3; -1[$ et sur $[2; 4[$).

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation graphique de la fonction f . On a matérialisé les points $A(-2; 0)$ et $B(3; 0)$ (remarque : sur chaque intervalle de la forme $[k, k+1[$, la courbe représentative de la fonction f est une branche de parabole).

