Durée 2 heures.
La calculatrice graphique est autorisée.

<u>Une attention particulière devra être portée à la clarté et à la précision de la rédaction, éléments entrant pour une part significative dans la notation chiffrée.</u>

La barème est fourni à titre indicatif.

« Ce n’est pas parce que les choses sont difficiles, que nous n’osons pas.
C’est parce que nous n’osons pas, que les choses sont difficiles. »
SENEQUE

Exercice 1 - 2 points

Déterminer :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}$$

Exercice 2 – 5 points

On considère la fonction *f* définie par :

$$f\left(x\right)=\sqrt{x^2+2}+x$$

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)$;
2. Montrer que l’on a : $f\left(x\right)-2x=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}$. En déduire que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de *f* admet en $+\infty$ une asymptote dont on précisera une équation. Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l’asymptote.
3. En utilisant la question précédente, donner une valeur approchée de $f\left(10\right)$. Quelle est l’erreur (exprimée en pourcentage) commise ?
4. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)$. En déduire que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de *f* admet en $-\infty$ une asymptote dont on précisera une équation. Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l’asymptote.

Exercice 3 – 5 points

On se propose de déterminer :

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\times\left(\cos^2 x-\frac{4}{\cos x+3}\right)\right]$$

1. A quel type de forme indéterminée a-t-on affaire ?
2. Montrer que l'on a : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ (on utilisera : $\cos x=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$) ;
3. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+3x^2-4$.
   En remarquant que l'on a : $f(-2)=0$, factoriser $f(x)$.
   En déduire une factorisation de $\cos^3 x+3\cos^2 x-4$;
4. En utilisant les résultats précédents, déterminer : $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\times\left(\cos^2 x-\frac{4}{\cos x+3}\right)\right]$.

Exercice 4 – 4 points

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$f(x)=\frac{2x+5\sin x}{x-1}$$

1. Montrer que pour tout *x* réel strictement supérieur à 1 on a : $\frac{2x-5}{x-1}\leq f(x)\leq\frac{2x+5}{x-1}$;
2. Déduire de la question précédente : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;
3. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;
4. Reprendre la question 1 avec la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f_a(x)=\frac{2x+a\sin x}{x-1}$
   où *a* est un réel non nul fixé.

Exercice 5 – 4 points

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x\mapsto\left[6-\mathrm{E}(x)\times x\right]\times\left[x-\mathrm{E}(x)\right]$$

Etudier la continuité de *f* sur $\mathbb{R}$.