Durée 2 heures.
La calculatrice collège est autorisée.

Une attention particulière devra être portée à la clarté et à la précision de la rédaction, éléments entrant pour une part significative dans la notation chiffrée.

Le barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 - 4 points

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin x + \sin^3 x$$

1. Pour tout *x* réel, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$
2. Démontrer que pour tout réel *x* on a :

$$f(x) = \frac{1}{9}\left[14\sin x - f''(x)\right]$$

3. En déduire la primitive de *f* sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur $\frac{1}{6\sqrt{2}}$ en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2 – 4 points

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(3x)$.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on note $f^{(n)}$ la dérivée nième de la fonction *f*.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n* on a :

$$f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Rappel : pour tout réel *x* on a $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Exercice 3 – 12 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout x réel positif on ait :

$$x(x+2) = a(x+1)^2 + b$$

2. Dresser (on justifiera soigneusement) le tableau de variation de la fonction f ;
3. A l'aide d'une approximation affine, donner une valeur approchée de $f(1{,}04)$;
4. Donner, suivant la valeur du réel k le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ (aucune justification n'est demandée) ;
5. Déterminer les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$;

On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}_-^*$ par :

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

6. Dresser (on justifiera soigneusement) le tableau de variation de la fonction g ;
7. Déterminer les primitives de la fonction g sur $\mathbb{R}_-^*$;

On considère enfin la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

8. Pourquoi la fonction h admet-elle des primitives sur $\mathbb{R}$?
9. Déterminer la primitive H de la fonction h qui s'annule en 0.

Fin du sujet