

**correction du
DTL MATHS du 19-11-10**

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie sur $[0; 4]$ par : $f(x) = x\sqrt{4x - x^2}$ et \mathcal{C} sa courbe représentative

1) Soit $A(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{4h-h^2}}{h} = \sqrt{4h-h^2}$,

alors, $\lim_{h \rightarrow 0^+} A(h) = 0$, donc $f'(0) = 0$, la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0 est horizontale

2) Soit $B(h) = \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{(4+h)\sqrt{-4h-h^2}}{h} = \frac{(4+h)\sqrt{h^2(-1-\frac{4}{h})}}{h} = \frac{(4+h)|h|\sqrt{-1-\frac{4}{h}}}{h}$

ici $h < 0$ donc $B(h) = -(4+h)\sqrt{-1-\frac{4}{h}}$ et $\lim_{h \rightarrow 0^-} B(h) = -\infty$ donc f n'est pas dérivable en 4

cependant, \mathcal{C} admet en ce point une tangente verticale

3a) $f'(x) = 1 \times \sqrt{4x - x^2} + x \times \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = \frac{\sqrt{4x-x^2} \times \sqrt{4x-x^2} + x(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{-2x^2+6x}{\sqrt{4x-x^2}}$

b) $f'(x) = \frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$, $f'(x) > 0$ sur $]0; 3[$; $f'(x) < 0$ sur $]3; 4[$

donc f croissante sur $]0; 3[$ et f décroissante sur $]3; 4[$

Exercice 2 : A) Soit $I = [0; \frac{\pi}{4}]$, on considère la fonction g définie sur I par: $g(x) = \tan x - x$

1) sur I , $g'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$ g est croissante sur I

2) de plus, $g(0) = 0$, donc sur I , $g(x) \geq 0$

B) $f(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x^3$

1) Sur I , $f'(x) = \tan^2 x - x^2 = (\tan x + x)(\tan x - x)$

2) on a vu précédemment que : $\tan x - x \geq 0$ sur I , et on sait que sur I , $\sin x \geq 0$ et $\cos x > 0$ donc $\tan x \geq 0$ donc $(\tan x + x) \geq 0$ donc : $f'(x) \geq 0$, f est croissante sur I et $f(0) = 0$, donc $f(x) \geq 0$

3) sur I , $\tan x - x - \frac{1}{3}x^3 \geq 0$ donc : $\tan x \geq x + \frac{1}{3}x^3$

Exercice 3:

On considère la fonction f dérivable sur $[0; 1]$ et telle que : $f(0) = 0$ et $f'(x) = \sqrt{0.5 + x^2}$

$f(0) = 0$; $f(0+0.2) \approx f(0) + 0.2f'(0) \approx 0 + 0.2\sqrt{0.5} \approx 0.141$ $f(0.2) \approx 0.141$

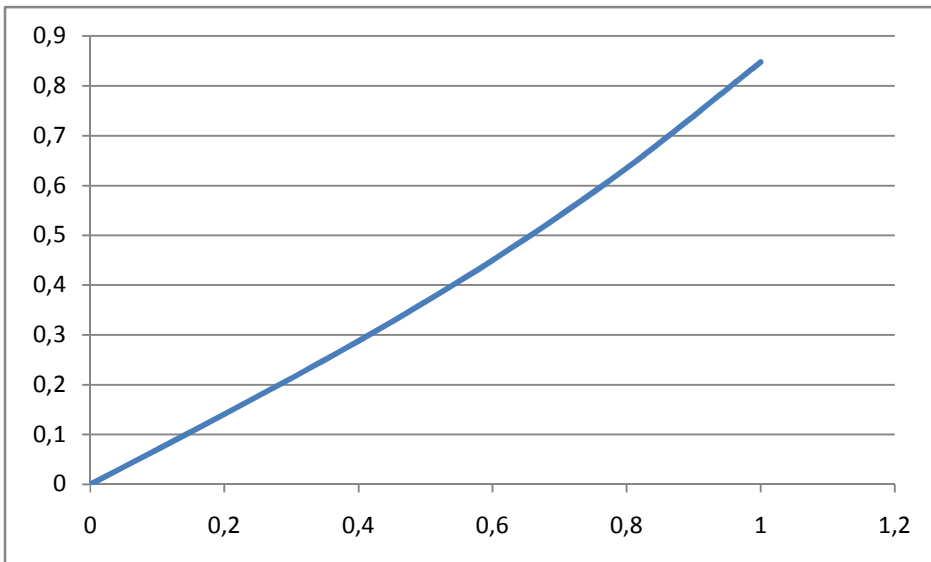
$f(0.2+0.2) \approx f(0.2) + 0.2f'(0.2) \approx 0.141 + 0.2 \times \sqrt{0.54} \approx 0.288$ $f(0.4) \approx 0.288$

$f(0.4+0.2) \approx f(0.4) + 0.2f'(0.4) \approx 0.288 + 0.2\sqrt{0.66} \approx 0.450$ $f(0.6) \approx 0.45$

$f(0.6+0.2) \approx f(0.6) + 0.2f'(0.6) \approx 0.45 + 0.2\sqrt{0.86} \approx 0.635$ $f(0.8) \approx 0.635$

$f(0.8+0.2) \approx f(0.8) + 0.2f'(0.8) \approx 0.635 + 0.2\sqrt{1.14} \approx 0.848$ $f(1) \approx 0.848$

attention, le dessin ci-dessous n'est pas à l'échelle demandée



Exercice 4:

On définit pour tout n de \mathbb{N}^* la suite (u_n) telle que : $u_1 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{4n}u_n$ (c'est la définition)

Montrer par récurrence que, pour tout n de \mathbb{N}^* , on a : $u_n = \frac{n}{4^n}$ (c'est la propriété à démontrer)

Initialisation: on calcule : $\frac{1}{4^1} = \frac{1}{4} = u_1$, la propriété est vraie au rang 1

hérédité :on suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire : $u_n = \frac{n}{4^n}$ et on démontre qu'elle est alors vraie à l'ordre $n + 1$

calculons $u_{n+1} = \frac{n+1}{4n}u_n = \frac{n+1}{4n} \times \frac{n}{4^n} = \frac{n+1}{4^{n+1}}$, la propriété est donc au rang $n + 1$, donc, sur \mathbb{N}^* ; $u_n = \frac{n}{4^n}$

Exercice 5 :

1) La fonction f est continue sur \mathbb{R} donc admet des primitives sur \mathbb{R}

2) sur \mathbb{R}_+ , $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, donc $F'(x) > 0$, F est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ ,

3) Pour tout x non nul, $h'(x) = F'(x) - \frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$

sur chaque intervalle \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- , $h'(x) = 0$, donc h est une fonction constante

4) on calcule alors $h(1) = F(1) + F(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, h étant une fonction constante, $h(x) = \frac{\pi}{2}$

5) on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} F(X) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, de plus, $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

donc: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$

la courbe \mathcal{C}_F admet pour asymptote la droite d'équation : $y = \frac{\pi}{2}$

6)

