TS5-6-7-8
DTL MATHS du 19-11-10
DUREE 2 heures
TOUTES CALCULETTES

Exercice 1(4.5 points) :

Soit la fonction f définie sur $[0; 4]$ par : $f(x) = x\sqrt{4x - x^2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative
1)Montrer que f est dérivable en 0, que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2)Montrer que f n'est pas dérivable en 4, $\mathcal{C}$ admet-elle une tangente au point d'abscisse 4 ?
3a)Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0; 4[$, on écrira $f'(x)$ sous la forme : $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{4x-x^2}}$ où g est un polynôme du second degré
b)En déduire le sens de variation de f

Exercice 2(4.5 points) :

A)Soit $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, on considère la fonction g définie sur I par: $g(x) = tanx - x$
1)Etudier les variations de g sur I
2)En déduire le signe de g sur I
B)Soit la fonction f définie sur I par : $f(x) = tanx - x - \frac{1}{3}x^3$
1)Sur I,calculer $f'(x)$ et l'écrire sous forme d'un produit de deux facteurs
2)En déduire les variations de f (se servir des résultats du A)
3)Démontrer alors que, sur I : $tanx \geq x + \frac{1}{3}x^3$

Exercice 3(3 points) :

On considère la fonction f dérivable sur $[0; 1]$ et telle que : $f(0) = 0 \; et \; f'(x) = \sqrt{0.5 + x^2}$
A l'aide de la méthode d'Euler, calculer des valeurs approchées de $f(0.2), f(0.4), f(0.6), f(0.8) et\ f(1)$
(on considèrera que h=0.2 est suffisamment petit) et tracer la courbe représentative de f
sur $[0; 1]$. On prendra pour échelle :10cm pour 1 unité

Exercice 4(3 points) :

On définit pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la suite (u_n) telle que : $u_1 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{4n} u_n$

Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \frac{n}{4^n}$

Exercice 5(6 points) :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1)Pourquoi la fonction f admet–elle des primitives sur $\mathbb{R}$?

On note F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que : $F(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\mathcal{C}_F$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On admet que la fonction F est impaire (F étant définie sur $\mathbb{R}$, on a donc : $F(0) = 0$).

2)Etudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout réel x non nul, on pose : $h(x) = F(x) + F.\left(\frac{1}{x}\right)$

On admet que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

3)Pour tout x non nul, calculer $h'(x)$. Qu'en concluez-vous ?

4)En choisissant alors judicieusement x, montrer que l'on a :$h(x) = \frac{\pi}{2}$

5)Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right)$ puis utiliser les résultats des questions précédentes pour calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

6)Donner l'allure de $\mathcal{C}_F$.