Exercice 1 :

1. <u>FAUX</u>

   On a (cf. cours) : $\operatorname{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2}$.

2. <u>VRAI</u>

   Posons : $z=x+iy$.
   On a alors : $\operatorname{Im}(-iz)=\operatorname{Im}[-i(x+iy)]=\operatorname{Im}(-ix+y)=-x=-\operatorname{Re}(z)$

3. <u>FAUX</u>

   Un point M d'affixe z est situé sur l'axe des ordonnées si, et seulement si, son abscisse est nulle, c'est-à-dire si <u>la partie réelle</u> de son affixe est nulle.

4. <u>VRAI</u>

   Un point M d'affixe z est situé sur l'axe des abscisses si, et seulement si, son ordonnée est nulle, c'est-à-dire si <u>la partie imaginaire</u> de son affixe est nulle. Or, on a classiquement (cf. le cours) : $\operatorname{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2}$. D'où : $\operatorname{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2}=0 \Leftrightarrow z-\overline{z}=0$.

5. <u>FAUX</u>

   Une infinité de complexe ont un module égal à un module donné non nul : ce sont les affixes de points situés sur le cercle de centre O et de rayon ce module donné (par exemple : $1+i$, $1-i$ et $\sqrt{2}$ ont le même module).
   En revanche, on a : $z=-z' \Rightarrow |z|=|-z'|$.

6. <u>FAUX</u>

   On a :

$$z=\frac{3+2i+i(1-2i)}{1+i}=\frac{3+2i+i+2}{1+i}=\frac{5+3i}{1+i}=\frac{(5+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{5-5i+3i+3}{1+1}=\frac{8-2i}{2}=4-i$$

   Il vient donc : $\operatorname{Re}(z)=4$ et $\operatorname{Im}(z)=-1$.

   ATTENTION : rappelons (pour la nième fois !) que la partie imaginaire d'un complexe est un réel !

7. VRAI

On a :

$$\frac{a+ib}{b-ia}=\frac{(a+ib)(b+ia)}{(b-ia)(b+ia)}=\frac{\cancel{ab}+ia^2+ib^2\cancel{-ab}}{a^2+b^2}=\frac{i\left(a^2+b^2\right)}{a^2+b^2}=i$$

Non seulement le complexe z est l'affixe d'un point situé sur l'axe des ordonnés mais en plus il est constant et égal à i !

8. FAUX

On a : $\overline{\left(\frac{iz}{z+1}\right)}=\frac{\overline{iz}}{\overline{z+1}}=\frac{\overline{i}\times\overline{z}}{\overline{z}+\overline{1}}=\frac{-i\times\overline{z}}{\overline{z}+1}$.

Remarque : certain(e)s élèves, de bonne foi, ont lu au numérateur « le conjugué du produit iz », la barre de conjugaison et le point du i ayant fusionné à la photocopie. Le demi point a été attribué à ceux(celles) ayant répondu « VRAI » en donnant une petite phrase de précision à ce sujet sur leur copie.

9. VRAI

Posons : $z=x+iy$.
On a :

$$z^2+\overline{z}^2=(x+iy)^2+(x-iy)^2=x^2\cancel{+2ixy}-y^2+x^2\cancel{-2ixy}-y^2=2\left(x^2-y^2\right)$$

10. VRAI

Posons : $z=x+iy\neq 0$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est : $\overline{z}=x-iy$ et celle du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$: $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{1}{|z|^2}\times\overline{z}$.

On a donc : $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{|z|^2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ sont colinéaires.

Les points O, m et N sont donc alignés.

Exercice 2 :

1. Sachant que $i^2=-1$, on aura successivement :

$z^2=(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1$, d'où $\boxed{z^2=2i}$.

$z^3=z\times z^2=(1+i)2i=2i+2i^2$, d'où $\boxed{z^3=-2+2i}$.

$z^4=(z^2)^2=(2i)^2$, d'où $\boxed{z^4=-4}$.

$z^{2010}=\left(z^4\right)^{502}\times z^2=(-4)^{502}\times 2i=4^{502}\times 2i=2^{1004}\times 2i$, d'où $\boxed{z^{2010}=2^{1005}i}$.

2. Posons $S=\sum_{k=0}^{2010} z^k = 1+z+z^2+z^3+...+z^{2010}$.

S est la somme des 2011 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison z. On a donc :

$$S=1\times\frac{1-(1+i)^{2011}}{1-(1+i)}=\frac{1-(1+i)(1+i)^{2010}}{1-(1+i)}=\frac{1-(1+i)(2^{1005}i)}{-i}=\frac{(1-2^{1005}i-2^{1005}i^2)i}{(-i)i}=\frac{i-2^{1005}i^2-2^{1005}i^3}{1}$$

, d'où

$$\boxed{S=2^{1005}+i(2^{1005}+1)}.$$

Exercice 3 :

$z=x+iy$ et $z'=3z^2+z\times\bar{z}-6i\sqrt{2}$.

1. On sait que $i^2=1$ et que $z\times\bar{z}=x^2+y^2$, d'où la forme algébrique de z' est :

$$z'=3(x+iy)^2+x^2+y^2-6i\sqrt{2}$$

$$z'=3(x^2+2ixy-y^2)+x^2+y^2-6i\sqrt{2}$$

$$z'=3x^2+6ixy-3y^2+x^2+y^2-6i\sqrt{2}$$

$$z'=4x^2+6ixy-2y^2-6i\sqrt{2}$$

$$\underline{z'=4x^2-2y^2+i(6xy-6\sqrt{2})}.$$

D'où , en identifiant partie réelle et partie imaginaire dans la forme algébrique de z', il vient :

$$\boxed{\mathrm{Re}(z')=4x^2-2y^2 \text{ et } \mathrm{Im}(z')=6xy-6\sqrt{2}}$$

2. $\underline{3z^2+z\times\bar{z}-6i\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow z'=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z')=0 \text{ et } \mathrm{Im}(z')=0}$.

$$\mathrm{Re}(z')=0 \text{ et } \mathrm{Im}(z')=0 \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2-2y^2=0\\ 6xy-6\sqrt{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-y^2=0\\ xy=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(\sqrt{2}x-y)(\sqrt{2}x+y)=0\\ xy=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\sqrt{2}x\\ xy=\sqrt{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}y=-\sqrt{2}x\\ xy=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\sqrt{2}x\\ \sqrt{2}x^2=\sqrt{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}y=-\sqrt{2}x\\ -\sqrt{2}x^2=\sqrt{2}\end{cases}$$

ce qui est impossible pour la seconde proposition.

D'où :

$$\text{Re}(z') = 0 \text{ et } \text{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ \sqrt{2}x^2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2} \\ x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -\sqrt{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation proposée est :

$$\boxed{S = \{1 + i\sqrt{2} ; 1 - i\sqrt{2}\}}.$$

Exercice 4 :

$z' = \dfrac{3iz - 7}{z - 3i} \qquad (z \neq 3i)$

z' imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(z') = 0$.

Mettons z' sous forme algébrique.

$$z' = \frac{3i(x+iy) - 7}{x + iy - 3i} = \frac{3ix + 3i^2y - 7}{x + i(y-3)} = \frac{3ix - 3y - 7}{x + i(y-3)} = \frac{[x - i(y-3)](3ix - 3y - 7)}{[x + i(y-3)][x - i(y-3)]}$$

$$= \frac{3ix^2 - 3xy - 7x + 3xy + 3iy^2 + 7iy - 9x - 9iy - 21i}{x^2 + (y-3)^2} = \frac{-16x + i(3x^2 + 3y^2 - 2y - 21)}{x^2 + (y-3)^2}$$

D'où :

$\text{Re}(z') = \dfrac{-16x}{x^2 + (y-3)^2}$, et $\text{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow -16x = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 0}$.

Donc l'ensemble des points cherchés est la droite d'équation $x = 0$, càd l'axe imaginaire, privé du point d'affixe $3i$.

Exercice 5 :

1. La fonction g est dérivable en tant que produit de deux fonctions dérivables (la fonction f, d'une part, et la fonction composée de la fonction linéaire $x \mapsto -x$ et de la fonction exponentielle, d'autre part) et on a :

$$g'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = \left[-f(x) + f'(x)\right] e^{-x}$$

Suivant un argument similaire, la fonction g' est elle-même dérivable et on a :

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left[-f'(x) + f''(x)\right] e^{-x} - \left[-f(x) + f'(x)\right] e^{-x} \\ &= \left[f(x) - 2f'(x) + f''(x)\right] e^{-x} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} g''(x) + 5g'(x) &= \left[f(x) - 2f'(x) + f''(x)\right] e^{-x} + 5\left[-f(x) + f'(x)\right] e^{-x} \\ &= \left[f(x) - 2f'(x) + f''(x) - 5f(x) + 5f'(x)\right] e^{-x} \\ &= \left[f''(x) + 3f'(x) - 4f(x)\right] e^{-x} \end{aligned}$$

La fonction f étant solution de l'équation différentielle (E), l'expression a l'intérieur du crochet est nulle et il vient finalement :

$$g''(x) + 5g'(x) = 0$$

La fonction g' est bien solution de l'équation différentielle : $y' + 5y = 0 \qquad (\mathrm{E}')$.

2. L'équation différentielle (E') est de la forme classique : $y' + ay = 0$ avec $a = 5$. Ses solutions s'écrivent alors : $y(x) = ke^{-5x}$ où k est une constante réelle.

3. En tant que solution de l'équation différentielle (E'), la fonction g' est aussi de la forme obtenue à la question précédente : $g'(x) = ke^{-5x}$.

A la question précédente, on a obtenu : $g'(x) = \left[-f(x) + f'(x)\right] e^{-x}$.

On a donc : $g'(x) = \left[-f(x) + f'(x)\right] e^{-x} = ke^{-5x}$.

En particulier pour $x = 0$: $g'(0) = \left[-f(0) + f'(0)\right] e^{-0} = ke^{-5\times 0}$, soit :

$$-f(0) + f'(0) = k$$

Avec $f(0) = f'(0) = 1$, il vient immédiatement : $k = 0$.

En définitive, on a : $g'(x)=0$.

Il vient immédiatement : $g(x)=e^{-x}f(x)=C$ où C est une constante réelle.

D'où : $f(x)=Ce^{x}$.

La condition : $f(0)=1$ nous donne enfin : $C=1$.

La fonction *f* est la fonction exponentielle !

Exercice 6 :

1ère partie : étude de la fonction *f*

1. Comme on a : $\forall x\in\mathbb{R},\ e^{x}>0$, il vient : $\forall x\in\mathbb{R},\ e^{x}+1>1>0$. Le dénominateur de f est défini sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule pas. Par ailleurs, le numérateur de *f* est la composée de la fonction exponentielle et de la fonction polynôme : $x\mapsto x^2+2x+5$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$.

   En définitive, la fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ et il convient de déterminer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

   → Limite en $-\infty$

   On a d'abord la limite classique (cours) : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$.

   Or, $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+2x+5\right)=0^2+2\times0+5=5$.

   On en déduit alors (composition) : $\lim\limits_{x\to0}\left(e^{2x}+2e^{x}+5\right)=5$.

   On a aussi (somme) : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}+1\right)=0+1=1$.

   Finalement (rapport) : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{5}{1}=5$

   $$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=5}$$

   On en déduit :

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation : $y=5$.

→ Limite en $+\infty$

Nous procédons comme précédemment en tenant compte cette fois de : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

On a d'abord : $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2x+5\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

D'où (composition) : $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}+2e^x+5\right) = +\infty$.

Par ailleurs, on a immédiatement (somme) : $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+1\right) = +\infty$.

Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Nous factorisons pour lever l'indétermination :

$$f(x) = \frac{e^{2x}+2e^x+5}{e^x+1} = \frac{e^{2x}\left(1+\frac{2}{e^x}+\frac{5}{e^{2x}}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = e^x\,\frac{1+\frac{2}{e^x}+\frac{5}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^x}}$$

A partir de $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ on a facilement $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}} = 0$ d'où (somme) :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{e^x}+\frac{5}{e^{2x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right) = 1$$

Il vient enfin (produit) :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x\,\frac{1+\frac{2}{e^x}+\frac{5}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^x}}\right) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)+\infty}$$

2. La fonction exponentielle est, par définition, dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto x^2+2x+5$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Le numérateur de *f* est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de deux fonctions dérivables sur cet ensemble.

   Le dénominateur de *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet ensemble : la fonction exponentielle et la fonction constante $x\mapsto 1$.

La fonction *f*, définie sur $\mathbb{R}$, est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que rapport de deux fonctions dérivables sur cet ensemble.

En tenant compte du fait que la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est la fonction : $x \mapsto 2e^{2x}$, il vient :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(2e^{2x}+2e^{x}\right)\left(e^{x}+1\right)-\left(e^{2x}+2e^{x}+5\right)e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}} = \frac{2e^{x}\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}+1\right)-\left(e^{2x}+2e^{x}+5\right)e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}} \\
&= e^{x}\,\frac{2\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}+1\right)-\left(e^{2x}+2e^{x}+5\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}} = e^{x}\,\frac{2\left(e^{2x}+2e^{x}+1\right)-\left(e^{2x}+2e^{x}+5\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}} \\
&= e^{x}\,\frac{2e^{2x}+4e^{x}+2-e^{2x}-2e^{x}-5}{\left(e^{x}+1\right)^{2}} = e^{x}\,\frac{e^{2x}+2e^{x}-3}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}
\end{aligned}$$

On a bien :

$$\boxed{f' : x \mapsto \frac{e^{x}\left(e^{2x}+2e^{x}-3\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}}$$

3. Il convient d'étudier le signe de $f'(x)$.

   On a : $f'(x) = \dfrac{e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}} \times \left(e^{2x}+2e^{x}-3\right)$.

   Comme : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x} > 0$ et $e^{x}+1 > 0$, il vient immédiatement : $\dfrac{e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}} > 0$.

   Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $e^{2x}+2e^{x}-3$.

   Posons : $X = e^{x}$. On a alors : $e^{2x}+2e^{x}-3 = X^{2}+2X-3$.

   On constate que $X = 1$ est racine évidente (la somme des coefficients est nulle) et on peut donc factoriser par $X-1$. On obtient : $X^{2}+2X-3 = (X-1)(X+3)$. D'où :

$$e^{2x}+2e^{x}-3 = \left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+3\right)$$

   On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x}+3 > 3 > 0$. Le signe du produit $\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+3\right)$ est donc celui de $e^{x}-1$.

En tenant compte de $e^0 = 1$ et de la croissance stricte de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, il vient :

- $\forall x \in]-\infty;0[,\ e^x - 1 < 0$ et $f'(x) < 0$;
- $f'(0) = 0$;
- $\forall x \in]0;+\infty[,\ e^x - 1 > 0$ et $f'(x) > 0$.

La fonction *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On déduit de ce qui précède que la fonction *f* admet un minimum global pour $x = 0$. Ce minimum vaut : $f(0) = \dfrac{e^{2\times 0} + 2e^0 + 5}{e^0 + 1} = \dfrac{1+1+5}{1+1} = \dfrac{7}{2}$

Les résultats précédents et ceux de la question 1 nous permettent de construire le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
f	5	$\searrow$	$\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. D'après ce qui précède, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq \dfrac{7}{2} > 0$:

La fonction *f* prend des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.

2ème partie : étude d'une primitive de la fonction *f*.

5. La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle y est dérivable (cf. question 2). Elle admet donc des primitives sur cet intervalle.

6. La fonction F étant une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$, on a, par définition : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x) = f(x)$.

   Or, à la question 4, nous avons obtenu : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

   On en déduit immédiatement :

La fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet ensemble : la fonction F et la fonction $x \mapsto -e^x - x$ (elle-même dérivable en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ …). On a alors, pour tout x réel :

$$\begin{aligned} \mathrm{G}'(x) &= \mathrm{F}'(x) - e^x - 1 = f(x) - e^x - 1 = \frac{e^{2x}+2e^x+5}{e^x+1} - e^x - 1 = \frac{e^{2x}+2e^x+5}{e^x+1} - \left(e^x+1\right) \\ &= \frac{e^{2x}+2e^x+5-\left(e^x+1\right)^2}{e^x+1} = \frac{e^{2x}+2e^x+5-\left(e^{2x}+2e^x+1\right)}{e^x+1} = \frac{e^{2x}+2e^x+5-e^{2x}-2e^x-1}{e^x+1} \\ &= \frac{4}{e^x+1} \end{aligned}$$

Comme : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x+1>0$, il vient immédiatement : $\dfrac{4}{e^x+1} > 0$.

La fonction G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Bien que non demandé, nous fournissons ici le signe de G sur $\mathbb{R}$ en justifiant.

On a d'abord : $\mathrm{G}(0) = \mathrm{F}(0) - e^0 - 0 = \mathrm{F}(0) - 1$. Or, d'après l'énoncé, la fonction F prend la valeur 1 en 0. On a donc : $\mathrm{G}(0) = \mathrm{F}(0) - 1 = 1 - 1 = 0$.

La fonction G s'annulant en 0 et étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a immédiatement : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \mathrm{G}(x) < 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{G}(x) > 0$.

D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{G}(x)$		$-$	0	$+$	

8. D'après la question précédente, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \mathrm{G}(x) < 0$, soit : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \mathrm{F}(x) < e^x + x$.

Or : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$. D'où (somme) : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x + x\right) = -\infty$.

Finalement (comparaison) : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{F}(x) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \mathrm{F}(x) = -\infty}$$

On procède de façon similaire pour déterminer la limite en $+\infty$.

Toujours d'après la question 7 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{G}(x) > 0$, soit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{F}(x) > e^x + x$.

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. D'où (somme) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x + x\right) = +\infty$.

Finalement (comparaison) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = +\infty}$$

A titre de complément, nous donnons la primitive F (son expression fait intervenir la fonction logarithme népérien …) :

$$\mathrm{F} : x \mapsto e^x - 4\ln\left(e^x + 1\right) + 5x + 4\ln 2$$

Nous fournissons ci-dessous les courbes représentatives des fonctions *f* (en bleu) et F (en rouge) :