

**Durée 3 heures.**  
**Calculatrice COLLEGE autorisée.**

**Une attention particulière devra être portée à la clarté et à la précision de la rédaction, éléments entrant pour une part significative dans la notation chiffrée.**

**La barème est fourni à titre indicatif.**

### **Exercice 1 - 5 points**

Préciser sur votre copie, pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse (*aucune justification n'est demandée*) :

1. La partie imaginaire d'un nombre complexe est  $\frac{z + \bar{z}}{2i}$  ;
2. Soit  $z$  un nombre complexe. On a :  $\text{Im}(-iz) = -\text{Re}(z)$  ;
3. Le point du plan complexe d'affixe  $z \in \mathbb{C}$  est situé sur l'axe des ordonnées si et seulement si  $\text{Im}(z) = 0$  ;
4. Le point du plan complexe d'affixe  $z \in \mathbb{C}$  est situé sur l'axe des abscisses si et seulement si  $z - \bar{z} = 0$  ;
5. Si  $z$  et  $z'$  sont deux nombres complexes tels que  $|z| = |z'|$  alors  $z = z'$  ou  $z = -z'$  ;
6. Si  $z = \frac{3 + 2i + i(1 - 2i)}{1 + i}$ , la partie réelle de  $z$  vaut 4 et sa partie imaginaire vaut  $-i$  ;
7. Si  $a$  et  $b$  sont deux réels non nuls simultanément alors le point M du plan complexe d'affixe  $\frac{a + ib}{b - ia}$  est toujours situé sur l'axe des ordonnées ;
8. Soit  $z$  un nombre complexe, le conjugué de  $\frac{iz}{z + 1}$  est  $\frac{i\bar{z}}{\bar{z} + 1}$  ;
9. Pour tout complexe  $z$ ,  $z^2 + \bar{z}^2$  est réel ;
10. Soit  $z$  un complexe non nul. Dans le plan complexe d'origine O, les points O,  $M(\bar{z})$  et  $N\left(\frac{1}{z}\right)$  sont alignés.

### **Exercice 2 – 2,5 points**

On pose :  $z = 1 + i$ .

1. Calculer  $z^2$ ,  $z^3$ ,  $z^4$  puis  $z^{2010}$  ;
2. Calculer :  $\sum_{k=0}^{2010} z^k = 1 + z + z^2 + \dots + z^{2010}$ .

**Exercice 3 – 2 points**

---

Soit un nombre complexe  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels.

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de  $z'$  défini par :

$$z' = 3z^2 + z \times \bar{z} - 6i\sqrt{2}$$

2. Résoudre dans l'ensemble des complexes l'équation :

$$3z^2 + z \times \bar{z} - 6i\sqrt{2} = 0$$

**Exercice 4 – 2,5 points**

---

A tout complexe  $z = x + iy$  avec  $z \neq 3i$ , on associe le complexe  $z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i}$ .

Trouver l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tel que  $z'$  soit un imaginaire pur.

**Exercice 5 – 3 points**

---

On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 3y' - 4y = 0 \quad (\text{E})$$

On cherche la solution  $f$  de (E) telle que  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 1$ .

1. On définit la fonction  $g$  par :

$$g : x \mapsto e^{-x} f(x)$$

Démontrer que la fonction  $g'$  est solution de l'équation différentielle (E') :  $y' + 5y = 0$ .

2. Résoudre l'équation différentielle (E').
3. Déterminer alors la fonction  $f$ .

**Exercice 6 – 5 points**

---

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f : x \mapsto \frac{e^{2x} + 2e^x + 5}{e^x + 1}$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**1<sup>ère</sup> partie : étude de la fonction  $f$** 

1. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition et, s'il y a lieu, interpréter graphiquement les résultats.
2. Montrer que la dérivée  $f'$  de  $f$  est la fonction définie par :

$$f' : x \mapsto \frac{e^x (e^{2x} + 2e^x - 3)}{(e^x + 1)^2}$$

3. Etudier le sens de variation de la fonction  $f$  et construire son tableau de variation.
4. En déduire le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**2<sup>ème</sup> partie : étude d'une primitive de la fonction  $f$** 

5. Justifier que  $f$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .

On appelle  $F$  la primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui prend la valeur 1 en 0 (ne pas chercher à calculer  $F$ ).

6. Quel est le sens de variation de  $F$  ? Justifier brièvement.

On définit la fonction  $G$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$G : x \mapsto F(x) - e^x - x.$$

7. Montrer que  $G$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  puis donner, sans justifier, son tableau de signes sur  $\mathbb{R}$ .
8. Déduire de ce qui précède les limites de  $F$  aux bornes de son ensemble de définition.

---

Fin du sujet

---