<u>Correction</u>

<u>Partie A.</u>

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$$

a) En multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{\frac{x}{4}}$, on obtient :

$$\frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}} = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{e^{\frac{x}{4}} + 2} = f(x)$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{-x}{4}} = 0$ donc $\left[\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + 2] e^{\frac{-x}{4}}\right) = 1$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{1 + 2e^{\frac{-x}{4}}} = 3$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{4}} = +\infty$ donc $\left[\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + 2] e^{\frac{-x}{4}}\right) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{1 + 2e^{\frac{-x}{4}}} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

c) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{4}e^{\frac{x}{4}}\left(2 + e^{\frac{x}{4}}\right) - \frac{3e^{\frac{x}{4}}e^{\frac{x}{4}}}{4}}{\left(2 + e^{\frac{x}{4}}\right)^2} = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2\left(2 + e^{\frac{x}{4}}\right)^2}$$

Or $e^{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, donc $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$ d'où f est croissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Partie B.</u>

1) a) L'équation (E1) est de la forme $y' = ay \quad avec\ a = \frac{1}{4}$. D'après le cours, ses solutions sont de la forme : $h(x) = ke^{\frac{x}{4}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

b) $g\ est\ solution\ de\ (E1) \quad et \quad g(0) = 1$ donc $g(0) = ke^{0} = 1$ donc $k = 1$

d'où $g(x) = e^{\frac{x}{4}}$

2) a) $h\ est\ solution\ de\ (E3) \Leftrightarrow \left\{h'(t) = \frac{h(t)}{4} + \frac{1}{12}\right.$ et h(0)=1

$$\Leftrightarrow \left\{\frac{-u'(t)}{u^2(t)} = \frac{1}{4u(t)} + \frac{1}{12} \quad et \quad \frac{1}{u(0)} = 1\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{u'(t) = \frac{-u(t)}{4} \quad \frac{u^2(t)}{12} \quad et\ u(0) = 1\right.$$

$\Leftrightarrow$ u *est solution de* $(E2)$

b) L'équation est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = \frac{-1}{4}$ et $b = \frac{1}{12}$

D'après le cours, les solutions sont de la forme :

$$f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$f(x) = ke^{\frac{-x}{4}} - \frac{1}{12} : \frac{-1}{4}$$

$$f(x) = ke^{\frac{-x}{4}} + \frac{1}{3}$$

h *est solution de* $(E3)$ *et* $h(0) = 1 \Leftrightarrow h(x) = ke^{\frac{-x}{4}} + \frac{1}{3}$ *et* $h(0) = 1$

D'où $h(0) = ke^{0} + \frac{1}{3} = 1$ donc $k = \frac{2}{3}$

Donc $h(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{-x}{4}} + \frac{1}{3}$

Et $u(x) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\frac{2}{3}e^{\frac{-x}{4}} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}} = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{e^{\frac{x}{4}} + 2} = f(x)$ de la partie A.

d) D'après la partie A, on peut conclure que la population étudiée tend vers 300 individus quant t tend vers + ∞ .