DTL Mathématiques TS 5-6-7-8

Durée 3 heures

Calculettes collège

Exercice 1 (5 points)

Dans le plan complexe, soient les points A et B d'affixe : $z_A = 1$ et $z_B = 2i$,

à tout point M (différent de B) d'affixe z on associe M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{z-2i}$

On pose : $z = x + iy$

a)Résoudre: $\frac{z-1}{z-2i} = i$ et donner la solution sous forme algébrique

On pose : $z' = x' + iy'$

b)Exprimer $x'et\ y'$ en fonction de $x\ et\ y$

c)Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que z' soit réel

d)Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur

Exercice 2 (5 points)

Répondre par vrai ou faux sans justification sur votre copie (les mauvaises réponses seront sanctionnées)

Soit z un nombre complexe,

1)un argument de : $-\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$ est $\frac{5\pi}{4}$

2)le conjugué de $z + 5i$ est $z - 5i$

3)$|2 - 4i| = 2|1 + 2i|$

4)$z + \bar{z} = 2Re(z)$

5)$z - \bar{z} = 2Im(z)$

6)$z \times \bar{z} = |z|$

7)pour tout complexe z non nul,on a : $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k\ entier) \Leftrightarrow z\ imaginaire\ pur$

8)tout nombre complexe possède un module

9)tout nombre complexe possède une infinité d'arguments

10)l'inverse de $4 + 3i$ est $\frac{4-3i}{7}$

Exercice 3 (5.5 points)

L'annexe est à rendre avec la copie

On considère les deux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations respectives $y = \mathrm{e}^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.
Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente $\mathscr{T}$ commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.
   Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_2)$.
2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et par B le point d'abscisse b de la courbe $(\mathscr{C}_2)$.
   a. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_\mathrm{A})$ à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point A.
   b. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_\mathrm{B})$ à la courbe $(\mathscr{C}_2)$ au point B.
   c. En déduire que les droites $(\mathscr{T}_\mathrm{A})$ et $(\mathscr{T}_\mathrm{B})$ sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S) :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{e}^a & = & -2b \\ \mathrm{e}^a - a\mathrm{e}^a & = & b^2 - 1 \end{array}\right. .$$
   d. Montrer que le système (S) est équivalent au système (S′) :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{e}^a & = & -2b \\ \mathrm{e}^{2a} + 4a\mathrm{e}^a - 4\mathrm{e}^a - 4 & = & 0 \end{array}\right. .$$
3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation
   $$(\mathrm{E}) \ : \quad \mathrm{e}^{2x} + 4x\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^x - 4 = 0.$$
   Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 4x\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^x - 4.$$
   a. Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty\,;\,0[$, $\mathrm{e}^{2x} - 4 < 0$ et $4\mathrm{e}^x(x-1) < 0$.
   b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.
   c. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   On note a cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.
4. On prend pour A le point d'abscisse a. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites $(\mathscr{T}_\mathrm{A})$ et $(\mathscr{T}_\mathrm{B})$ sont confondues.

Exercice 4 (4.5 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}.$$

a. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1)\, y' = \frac{y}{4}.$$

a. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est- à-dire $g(0) = 1$.

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_2)\begin{cases} u'(t) &= \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) &= 1. \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_3)\begin{cases} h'(t) &= -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) &= 1. \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

NOM :

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe 1