

Durée 4 heures.

La calculatrice graphique est autorisée.

Une attention particulière devra être portée à la clarté et à la précision de la rédaction, éléments entrant pour une part significative dans la notation chiffrée.

Le barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 – 6 points

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$4z^2 - 12z + 153 = 0$$

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm on

considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$,

$z_C = -3 - \frac{1}{4}i$, $z_P = 3 + 2i$ et le vecteur \vec{w} d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

a. Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B par la translation t de vecteur \vec{w} .

b. Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

c. Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Placer les points P, Q, R et S.

3. a. Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b. Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.

En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

c. Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté \mathcal{C} . On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ .

4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle \mathcal{C} ?

Exercice 2 – 4 points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par $M(z)$ le point M ayant pour affixe z .

- Placer sur une figure les points $A(2+i)$, $B(2i)$, $C(-4+3i)$ et $D(-8)$ en prenant 1 cm pour unité graphique.
- Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (1+2i)z - 4 - 2i$$

- Préciser les images des points A et B par f .
 - Montrer que f admet un unique point fixe Ω , dont on précisera l'affixe ω (M est un point fixe pour f si, et seulement si : $f(M) = M$).
- On admet que $\omega = 1 - 2i$.

- Montrer que, pour tout complexe z on a : $z' - z = -2i(\omega - z)$.

Dans toute la suite, on suppose que M est différent de Ω .

- Déduire de la question précédente le rapport des distances $\frac{MM'}{M\Omega}$, et l'angle de vecteurs $(\overline{M\Omega}, \overline{MM'})$.
- Déduire des questions précédentes une construction géométrique du point M' , connaissant le point M (on réalisera cette construction sur la figure de la question 1. en considérant un point M quelconque).

Exercice 3 – 10 points

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm).

Partie A (7,5 points)

- En remarquant que -1 est solution de l'équation $x^3 + 1 = 0$, factoriser $x^3 + 1$ et montrer que l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de la fonction f est l'intervalle : $] -1; +\infty[$.
- Déterminer la limite de la fonction f en -1 à droite et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = 0$. Les courbes représentatives de la fonction f et de la fonction logarithme népérien sont donc asymptotes. Préciser leur position relative en étudiant le signe de $\Delta(x) = f(x) - \ln x$ sur \mathbb{R}_+^* .
4. a. Justifier que la fonction f est dérivable sur \mathcal{D}_f .
- b. Montrer que l'on a, pour tout réel x de \mathcal{D}_f :
- $$f'(x) = \frac{x(x^3 + 3x - 2)}{(x^3 + 1)(x^2 + 1)}$$
- c. Etudier les variations de la fonction $g : x \mapsto x^3 + 3x - 2$ sur \mathcal{D}_f et montrer que g s'annule pour une unique valeur α . En donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} .
- d. Dédurre de la question précédente le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variation de f .
5. Montrer que \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en deux points et donner pour chacun d'eux une équation de la tangente à \mathcal{C}_f .
6. En vous aidant des questions 4.d. et 5. donner le signe de f .
7. Tracer \mathcal{C}_f (on fera également apparaître les divers éléments graphiques mis en évidence dans l'étude précédente, ces éléments facilitant le tracé de \mathcal{C}_f).

Partie B (2,5 points)

On considère maintenant la fonction φ définie par :

$$\varphi = f \circ \exp$$

1. Préciser l'ensemble de définition \mathcal{D}_φ de la fonction φ .
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C}_φ de la fonction φ . Préciser la position relative de \mathcal{C}_φ et de \mathcal{D} .
4. Etudier les variations de la fonction φ et montrer qu'elle admet un minimum global en $\beta = \ln \alpha$.

Fin du sujet
