Exercice 1

1. **Réponse a**.

   En effet, en posant $D =]-1;0[\cup]0;+\infty[$:

   - si $x = -0,5 \in D$, x < 0 donc $\ln(x+1) - \ln x$ n'est pas calculable ;
   - si $x = -0,5 \in D$, $\frac{x+1}{x} = -1$ donc $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ n'est pas calculable ;
   - si $x = 0,5 \in D$, $\frac{x}{x^2-1} = -\frac{2}{3} < 0$ donc $\ln\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$ n'est pas calculable ;
   - mais, $\forall\, x \in D$, $x+1 > 0$ donc $\ln(x+1)$ est calculable et $x \neq 0$, donc $\frac{\ln(x+1)}{x}$ est calculable.

2. **Réponses a et c**.

   En effet, les quatre fonctions proposées admettent 0 pour limite en + ∞ (par croissances comparées), mais :

   - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \frac{\ln 1}{1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (c'est une limite de cours).

   Alors que :

   - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x^2} = +\infty$.

3. **Réponses b et c**.

   En effet, $\ln 3a - \ln 3b = \ln 3 + \ln a - \ln 3 - \ln b = \ln a - \ln b$ et :

   - $\ln(3a^2) - \ln(3b^2) = \ln 3 + 2\ln a - \ln 3 - 2\ln b = 2(\ln a - \ln b)$;
   - $\ln 6a - \ln 6b = \ln 6 + \ln a - \ln 6 - \ln b = \ln a - \ln b$;
   - $\ln\sqrt{a} - \ln\sqrt{b} = \frac{1}{2}\ln a - \frac{1}{2}\ln b = \frac{1}{2}(\ln a - \ln b)$.

4. **Réponse c**.

   En effet, les solutions de $\ln(x-2) + \ln(x-32) = 6\ln 2$ doivent être telles que $x > 32\ (>2)$, (ce qui exclut les réponses b et d). De plus, pour $x > 32$, l'équation se réécrit :

   $$\ln\left[(x-2)(x-32)\right] = \ln 2^6 \iff x^2 - 34x + 64 = 64 \iff x(x-34) = 0.$$

   Comme $x \neq 0$, on a $x = 34$.

5. **Réponses a et d**.

En effet, les fonctions proposées sont soit non définie sur $]-\infty;0[$ (proposition c), soit dérivables sur $]-\infty;0[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]-\infty;0[$ (propositions a, b et d).

De plus, sur $]-\infty;0[$, la dérivée de $x \mapsto \ln(|x|) = \ln(-x)$ est $x \mapsto \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ donc :

- La dérivée de $x \mapsto x - \ln(1+e^x) + \ln(-x)$ est $x \mapsto 1 - \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{x} = f(x)$;
- La dérivée de $x \mapsto \ln(1+e^x) + \ln(|x|)$ est $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{x} \neq f(x)$;
- La dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(4x^2) - \ln(1+e^{-x}) = \ln 2 + \ln(|x|) - \ln(1+e^{-x})$ est $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = f(x)$.

6. **Réponses a et d**.

En effet, on a déjà pour $x > 0$, $f(x) = \ln(e+ex) = \ln e + \ln(1+x) = 1 + \ln(1+x)$ et :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[1+\ln(1+x)\right] = 1 = f(0)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^x = e^0 = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0 et la proposition a est vraie.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^x-1}{x} = 1$ donc f est dérivable en 0 (avec $f'(0) = 1$) et la proposition b est fausse.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[1+\ln(1+x)\right] = +\infty$ donc si le point de coordonnées $(0;1)$ était centre de symétrie de la courbe représentative de *f*, on aurait $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, ce qui est faux car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
- On a :
  - pour $x \leq 0$, $f(x) = e^x > 0$;
  - pour $x > 0$, $f(x) = 1 + \ln(1+x) > 0$ (car $1 + x > 1$ donc $\ln(1+x) > 0$).

  Ainsi, on a bien $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1. a) La fonction g est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}.$$

Sur $]0;+\infty[$, $\frac{2(x+1)}{x} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x-1$. Ainsi :

- g est strictement décroissante sur $]0;1[$;
- g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

De plus, $g(1) = 1 + 2 - 2\ln 1$, soit :

$$\boxed{g(1) = 3}.$$

b) Le variations de g prouve que g admet un minimum en 1 qui vaut $g(1) = 3 > 0$.
Donc, $\forall\, x \in]0;+\infty[$:

$$\boxed{g(x) > 0}.$$

2. a) <u>Limite en 0</u> :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\} \underset{\Rightarrow}{\text{par produit}} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{x} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \end{array}\right\} \underset{\Rightarrow}{\text{par somme}} \boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$$

<u>Limite en $+\infty$</u> :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0 \ \textit{par croissances comparées} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \underset{\Rightarrow}{\text{par somme}} \boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$$

b) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et :

$$f'(x) = 1 + 2\frac{x(1/x) - \ln x}{x^2} = 1 + 2\frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

On a vu dans la question précédente que $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $g(x) > 0$. Comme $x^2 > 0$, on a $f'(x) > 0$ donc :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[}.$$

On obtient le tableau :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
f	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

c) $\forall\, x \in \left]0;+\infty\right[$, $f(x) - x = \dfrac{2\ln x}{x}$ et on vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - x\right] = 0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La droite } \Delta \text{ d'équation } y = x \text{ est asymptote à } \mathscr{C} \text{ en } +\infty}.$$

De plus, $\forall\, x > 0$, le signe de $f(x) - x$ est celui de $\ln x$ donc :

- $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ sur $\left]0;1\right[$;
- $\mathscr{C}$ croise Δ au point d'abscisse 1 ;
- $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ sur $\left]1;+\infty\right[$.

d) Comme la fonction *f* est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente (non verticale) en chacun de ses points.

Cette tangente sera parallèle à Δ si et seulement si elle à la même pente que Δ, soit 1.

La pente de la tangente en un point d'abscisse *a* est donnée par $f'(a)$ donc la tangente sera parallèle à Δ si et seulement si $f'(a) = 1$. Et :

$$f'(a) = 1 \iff \frac{a^2 + 2 - 2\ln a}{a^2} = 1 \iff 2 - 2\ln a = 0 \iff \ln a = 1 \iff a = e.$$

$\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à Δ au point d'abscisse *e* et d'ordonnée :

$$f(e) = e + \frac{2\ln e}{e} = e + \frac{2}{e}.$$

Finalement :

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ admet une tangente T parallèle à } \Delta \text{ au point } \mathrm{A}\left(e\,;\, e + \frac{2}{e}\right)}.$$

e) La courbe est donnée à la fin.

3. Nous avons vu que *f* est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ donc elle y est continue. De plus, *f* est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$ de $-\infty$ à $+\infty$ donc, le théorème des valeurs intermédiaires

appliqué aux fonctions strictement monotones (ou théorème de la bijection pour les intimes) assure l'existence d'une unique solution x_0 à l'équation $f(x)=0$.

On a de plus :

- $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2\ln(1/2)}{1/2}=\frac{1}{2}-4\ln 2<0$ donc $\frac{1}{2}<x_0$;
- $f(1)=1+\frac{2\ln 1}{1}=1>0$ donc $x_0<1$.

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\frac{1}{2}<x_0<1}.$$

Comme f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, on a :

$$x<x_0 \Rightarrow f(x)<f(x_0) \text{ et } x>x_0 \Rightarrow f(x)>f(x_0).$$

D'où le tableau de signes :

x	0		x_0		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

4. a) On a vu que f est continue sur $]0;+\infty[$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle.

De plus, $f(x)=x+\frac{2\ln x}{x}=x+2\frac{1}{x}\ln x$.

- La fonction $x\mapsto 2\frac{1}{x}\ln x$ est de la forme $2u'(x)u(x)$ avec $u(x)=\ln x$. Une primitive de cette fonction est donc $x\mapsto (u(x))^2$ soit $x\mapsto(\ln x)^2$.
- Une primitive de $x\mapsto x$ est $x\mapsto\frac{1}{2}x^2$.

Les primitives de f sont donc de la forme $x\mapsto\frac{1}{2}x^2+(\ln x)^2+k$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Donc $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}x^2+(\ln x)^2+k$ et on veut $\mathrm{F}(1)=0$, soit :

$$\mathrm{F}(1)=\frac{1}{2}+(\ln 1)^2+k=\frac{1}{2}+k=0 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}.$$

La primitive recherchée est donc :

$$\boxed{\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}x^2+(\ln x)^2-\frac{1}{2}}.$$

b) On sait déjà que (par définition), F est dérivable sur $]0;+\infty[$ avec $\mathrm{F}'(x)=f(x)$ et grâce à la fort pertinente question 3, on connait le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Reste à déterminer les limites de F.

<u>Limite en 0</u> :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)^2=+\infty\end{array}\right\}\ \text{par somme}\ \Rightarrow\quad \boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{F}(x)=+\infty}$$

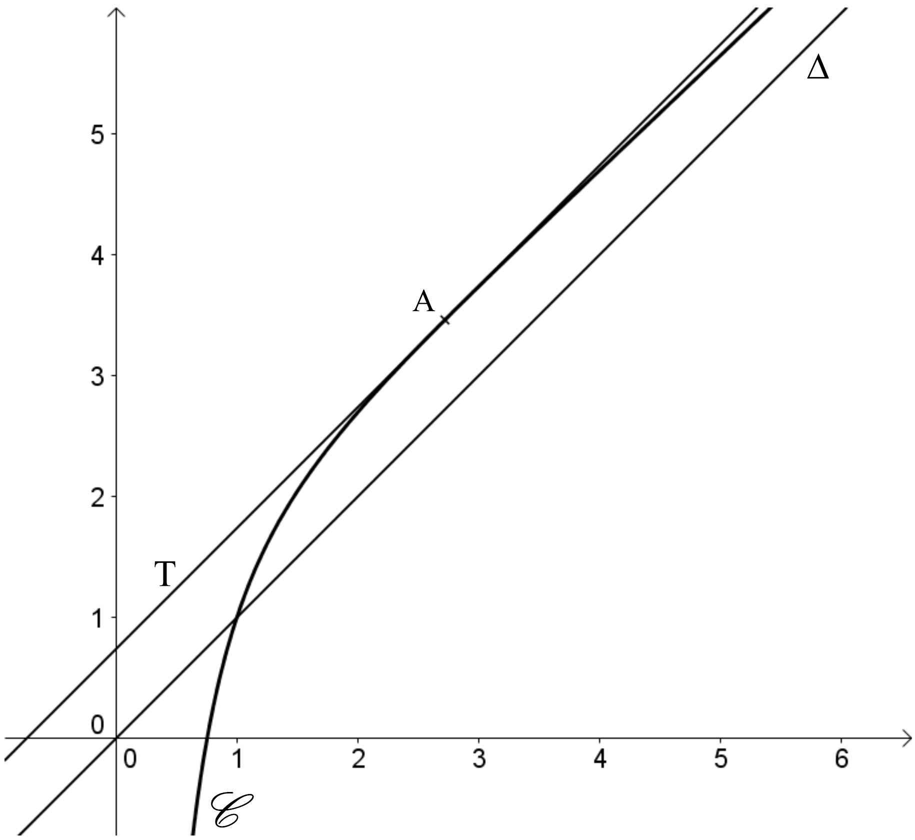
<u>Limite en $+\infty$</u> :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\right)=+\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^2=+\infty\end{array}\right\}\ \text{par somme}\ \Rightarrow\quad \boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{F}(x)=+\infty}$$

Finalement, on obtient le tableau de variations :

x	0		x_0		$+\infty$
$f(x)$	||	$-$	0	$+$	
F	|| $+\infty$	↘	$\mathrm{F}(x_0)$	↗	$+\infty$

<u>Courbe (*échelle non respectée*)</u> :



Exercice 3

1. a. Comme r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, l'écriture complexe de r est :

$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_{\mathrm{O}}) + z_{\mathrm{O}}.$$

Comme $z_{\mathrm{O}} = 0$, on obtient :

$$\boxed{z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z}.$$

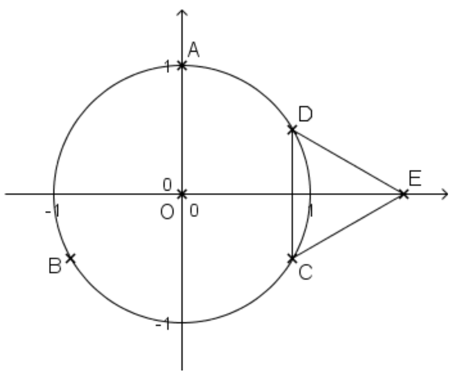
b. C l'image de B par r donc $z_{\mathrm{C}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_{\mathrm{B}}$ et avec $z_{\mathrm{B}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, on a :

$$z_{\mathrm{C}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)} \Leftrightarrow \boxed{z_{\mathrm{C}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}}.$$

c. On a :

- $z_{\mathrm{B}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ soit $\boxed{z_{\mathrm{B}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$.
- $z_{\mathrm{C}} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ soit $\boxed{z_{\mathrm{C}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$.

d. Figure (*échelle non respectée*) :



2. a. D est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients 2, -1 et 2.
Ce barycentre existe car 2 – 1 + 2 = 3 ≠ 0 et :

$$z_{\mathrm{D}} = \frac{2z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}} + 2z_{\mathrm{C}}}{3} = \frac{1}{3}\left(2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \sqrt{3} - i\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Donc on a bien :

$$\boxed{z_{\mathrm{D}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}.$$

b. $z_{\mathrm{A}} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_{\mathrm{B}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, $z_{\mathrm{C}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_{\mathrm{D}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $|z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{B}}| = |z_{\mathrm{C}}| = |z_{\mathrm{D}}| = 1$.

Or, pour tout point M d'affixe z_{M}, on $|z_{\text{M}}| = \text{OM}$ donc les égalités précédentes se traduisent par $\text{OA} = \text{OB} = \text{OC} = \text{OD} = 1$ et donc :

$$\boxed{\text{A, B, C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 1}}.$$

3. a. Comme *h* est l'homothétie de centre A(*i*) et de rapport 2, l'écriture complexe de *h* est :

$$z' = 2(z - z_{\text{A}}) + z_{\text{A}} = 2(z - i) + i.$$

Soit :

$$\boxed{z' = 2z - i}.$$

b. E l'image de D par *h* et, avec $z_{\text{D}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, on obtient :

$$z_{\text{E}} = 2z_{\text{D}} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - i = \sqrt{3} + i - i \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{z_{\text{E}} = \sqrt{3}}.$$

4. On a :

$$\frac{z_{\text{D}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{C}}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{\sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Soit :

$$\boxed{\frac{z_{\text{D}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{C}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}}.$$

b. Comme $\dfrac{z_{\text{D}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{C}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, on a $\left|\dfrac{z_{\text{D}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{C}}}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z_{\text{D}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{C}}}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Or :

- $\left|\dfrac{z_{\text{D}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{C}}}\right| = \dfrac{\text{CD}}{\text{CE}}$ donc $\text{CD} = \text{CE}$;
- $\arg\left(\dfrac{z_{\text{D}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{C}}}\right) = (\overrightarrow{\text{CE}}, \overrightarrow{\text{CD}})\ [2\pi]$ donc $(\overrightarrow{\text{CE}}, \overrightarrow{\text{CD}}) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Finalement, CDE est isocèle en C et possède un angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ donc :

$$\boxed{\text{CDE est équilatéral}}.$$

Exercice 4

Partie A

1. a) On peut remarquer directement que 1 est solution de (E) car $1-(4+i)+(7+i)-4=0$.

Si on n'a pas l'inspiration, on peut poser $Z=z_1^3-(4+i)z_1^2+(7+i)z_1-4$ et si $z_1\in\mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{Re}(Z)=z_1^3-4z_1^2+7z_1-4 \quad\text{et}\quad \mathrm{Im}(Z)=-z_1^2+z_1.$$

Alors, z_1 est solution de $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow Z=0 \Rightarrow \mathrm{Im}(Z)=0 \Leftrightarrow -z_1^2+z_1=0 \Leftrightarrow z_1=0\ ou\ 1$.

Or, 0 n'est clairement pas solution de (E) alors que 1 l'est (comme on l'a vu plus haut) donc :

$$\boxed{z_1=1}.$$

b) Avec $z_1=1$:

$$(z-z_1)(z-2-2i)(az+b)=(z-1)(z-2-2i)(az+b)=(z^2-(3+2i)z+2+2i)(az+b).$$

En développant, il est clair que le coefficient de z^3 sera 1 et le coefficient constant sera $(2+2i)b$ donc par identification de ces deux termes, on obtient $a=1$ et $(2+2i)b=-4$, soit $b=\dfrac{-4}{2+2i}=\dfrac{-2}{1+i}=\dfrac{-2(1-i)}{2}=-1+i$.

On a alors :

$$\begin{aligned}(z-1)(z-2-2i)(z-1+i)&=(z^2-(3+2i)z+2+2i)(z-1+i)\\&=z^3+(i-1)z^2-(3+2i)z^2+(3+2i)z-i(3+2i)z+2z-2+2i+2iz-2i-2\\&=z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4\end{aligned}$$

Et finalement, on obtient :

$$\boxed{z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=(z-1)(z-2-2i)(z-1+i)}.$$

2. (E) : $z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$ donc avec la question précédente :

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow (z-1)(z-2-2i)(z-1+i)=0.$$

Donc les solutions de (E) sont 1, $2+2i$ et $1-i$ soit :

$$\boxed{S=\{1\,;\ 2+2i\,;\ 1-i\}}.$$

Partie B

On a $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(2+2i)$ et $\mathrm{C}(1-i)$ (quelle surprise immense !)

1. Voir la figure à la fin de l'exercice.

2. On a $\dfrac{2+2i}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{1-i}=\dfrac{2(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2(1+2i+i^2)}{2}=2i$ donc :

$$\left|\frac{2+2i}{1-i}\right|=|2i|=2|i| \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)=\arg(2i)=\arg(i).$$

Soit :

$$\boxed{\left|\frac{2+2i}{1-i}\right|=2} \quad \text{et} \quad \boxed{\arg\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]}.$$

On peut remarquer que $\dfrac{2+2i}{1-i}=\dfrac{z_B}{z_C}=\dfrac{z_B-z_O}{z_C-z_O}$ donc :

$$(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB})=\arg\left(\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}\right)=\arg\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{OBC est rectangle en O}}.$$

3. Remarquons que $z_C=1-i=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

On a donc $(\vec{u},\overrightarrow{OC})=\arg(z_C)=\arg(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})=-\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Or, $z_A=1$, donc $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et ainsi $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=-\dfrac{\pi}{2}=2(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\ [2\pi]$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{(OA) est la bissectrice issue de O du triangle OBC}}.$$

4. D est l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C. L'écriture complexe de cette rotation est :

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-z_C)+z_C=-i(z-1+i)+1-i=-iz+2.$$

Donc $z_D=-iz_O+2$ et avec $z_O=0$, on obtient :

$$\boxed{z_D=2}.$$

5. Comme D est l'image de O par une rotation de centre C et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, l'angle $\widehat{OCD}$ est droit, soit $(CO)\perp(CD)$. Or, on a vu que OBC est rectangle en O, donc $(CO)\perp(OB)$.

Ainsi, les droites (CD) et (OB) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (CO) donc elles sont parallèles.

D'où :

$\boxed{\text{OCDB est un trapèze (rectangle en O et C)}}$.

Figure :