Durée 4 heures.
La calculatrice graphique est autorisée.

Une attention particulière devra être portée à la clarté et à la précision de la rédaction, éléments entrant pour une part significative dans la notation chiffrée.

Le barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 – QCM - 4 points

Pour chacune des 8 questions ci-dessous, indiquer **la ou les** bonne(s) réponse(s) **sur votre copie**. Aucune justification n'est demandée.

1. Lesquels de ces réels sont calculables pour $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$?

   a. $\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ b. $\ln(x+1) - \ln x$

   c. $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ d. $\ln\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$. $f(x)$ peut être égal à :

   a. $\dfrac{\ln x}{x}$ b. $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

   c. $\dfrac{\ln x}{x^2}$ d. $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

3. Si $a > 0$ et $b > 0$, alors $\ln 3a - \ln 3b$ est égal à :

   a. $\ln(3a^2) - \ln(3b^2)$ b. $\ln(6a) - \ln(6b)$

   c. $\ln a - \ln b$ d. $\ln\sqrt{a} - \ln\sqrt{b}$

4. L'équation $\ln(x-2) + \ln(x-32) = 6\ln 2$ a pour solution :

   a. 64 b. 0 et 34

   c. 34 d. -34

5. Une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$ est :

   a. $x \mapsto x - \ln(1+e^x) + \ln(-x)$

   b. $x \mapsto \ln(1+e^x) + \ln(|x|)$

   c. $x \mapsto \ln x - \ln(1+e^{-x})$

   d. $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(4x^2) - \ln(1+e^{-x})$

6. La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(e+ex) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   a. La fonction *f* est continue en 0
   b. La fonction *f* n’est pas dérivable en 0
   c. Le point de coordonnées $(0;1)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de *f*
   d. $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 – 7 points

Soit la fonction f définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par :

$$f\left(x\right)=x+\frac{2\ln x}{x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan (*Unité graphique : 2 cm*).

1. Etude de la fonction auxiliaire g définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $g\left(x\right)=x^2+2-2\ln x$.

   a) Etudier le sens de variation de g et calculer $g\left(1\right)$.

   b) En déduire le signe de $g\left(x\right)$ pour tout x de $\left]0;+\infty\right[$.

2. Etude de la fonction f.

   a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

   c) Montrer que la droite Δ d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathscr{C}$ et étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

   d) Déterminer les coordonnées du point A de $\mathscr{C}$ sachant que $\mathscr{C}$ admet en A une tangente T parallèle à Δ.

   e) Tracer $\mathscr{C}$, Δ et T dans le repère.

3. Démontrer que l'équation $f\left(x\right)=0$ admet une solution unique x_0 et prouver que $\frac{1}{2}\leq x_0\leq 1$. Construire alors sans justifier le tableau de signes de $f\left(x\right)$ sur $\left]0;+\infty\right[$.

4. Soit F la primitive de f sur $\left]0;+\infty\right[$ qui s'annule en 1.

   a) Donner l'expression de F(x) en fonction de x.

   b) Dresser le tableau de variations complet de F.

Exercice 3 – 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 4 cm).

Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = i$ et B le point d'affixe $z_{\text{B}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.

   a. Déterminer une écriture complexe de r.

   b. Montrer que l'affixe de C est $z_{\text{C}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

   c. Ecrire z_{B} et z_{C} sous forme algébrique.

   d. Placer les points A, B et C.

2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients 2, −1 et 2 respectivement.

   a. Montrer que l'affixe de D est $z_{\text{D}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Placer le point D.

   b. Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.

3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.

   a. Déterminer une écriture complexe de h.

   b. Montrer que l'affixe de E est $z_{\text{E}} = \sqrt{3}$. Placer le point E.

4. a. Calculer le rapport $\frac{z_{\text{D}} - z_{\text{C}}}{z_E - z_{\text{C}}}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.

   b. En déduire la nature du triangle CDE.

Exercice 4 – 4 points

Les parties A et B sont indépendantes.

On considère l'équation (E) :

$$z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$$

où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1. a) Montrer que (E) admet une solution réelle notée z_1.

   b) Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :

$$z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=(z-z_1)(z-2-2i)(az+b)$$

2. Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives 1, $2+2i$ et $1-i$.

1. Représenter A, B et C.

2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2i}{1-i}$.
   En déduire la nature du triangle OBC.

3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.

4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C. Déterminer l'affixe de D.

5. Quelle est la nature du quadrilatère OCDB ?

Fin du sujet