

**Exercice 1**

1. On a  $I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx$ .

Posons :

$$u(x) = 1-x \quad \text{et} \quad v(x) = e^x.$$

Ces deux fonctions sont dérivables et :

$$u'(x) = -1 \quad \text{et} \quad v'(x) = e^x.$$

Les dérivées sont continues donc :

$$I_1 = \left[ (1-x)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^x) dx = -1 + \int_0^1 e^x dx = -1 + \left[ e^x \right]_0^1 = -1 + e - 1.$$

Soit :

$$\boxed{I_1 = e - 2}.$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a  $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x dx$ .

Posons :

$$u(x) = (1-x)^{n+1} \quad \text{et} \quad v(x) = e^x.$$

Ces deux fonctions sont dérivables et :

$$u'(x) = -(n+1)(1-x)^n \quad \text{et} \quad v'(x) = e^x.$$

Les dérivées sont continues donc :

$$\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x dx = \left[ (1-x)^{n+1} e^x \right]_0^1 - \int_0^1 \left[ -(n+1)(1-x)^n \right] e^x dx = -1 + (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^x dx.$$

Soit :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \left[ (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^x dx - 1 \right] \\ &= \frac{n+1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Et donc on a bien :

$$\boxed{I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}}.$$

3. D'après la question précédente, on a  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{(n+1)!} < 0.$$

Donc, la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement décroissante.

4. Procédons par récurrence sur  $n$  :

*Initialisation* :

Pour  $n = 1$ , on a :

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e - \left(1 + \frac{1}{1!}\right) = e - (1+1) = e - 2.$$

Or,  $I_1 = e - 2$  d'après la question 1 donc la propriété est vraie au rang 1.

*Hérédité* :

Supposons la relation vraie au rang  $n$ .

D'après la question 2,  $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$ .

Par hypothèse de récurrence,  $I_n = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$ .

Donc :

$$I_{n+1} = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) - \frac{1}{(n+1)!} = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right).$$

Et ainsi, la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $\forall x \in [0;1]$ , on a :

$$0 \leq 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (1 - x)^n \leq 1.$$

Et par croissance de la fonction exponentielle :

$$e^0 \leq e^x \leq e^1 \Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq e.$$

Comme les inégalités précédentes ne mettent en jeu que des nombres positifs, on peut les multiplier membre à membre pour obtenir :

$$\boxed{0 \leq (1 - x)^n e^x \leq e}.$$

Par croissance de l'intégrale, on peut alors affirmer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$0 \leq \int_0^1 (1 - x)^n e^x dx \leq \int_0^1 e dx.$$

Et comme  $\int_0^1 e^x dx = e - 1$ , on obtient en divisant par  $n! > 0$  :

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}}$$

6. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n!} = 0$ .

Par le théorème des gendarmes, la double inégalité précédente permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$$

Or,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$ , donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \right] = 0.$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e}$$

*Remarque* : Ce résultat permet de calculer des valeurs approchées de  $e$  assez facilement. En effet, la suite converge très vite. Rien que pour  $n = 10$ , on obtient :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{10!} \approx 2,71828180 \quad \text{et} \quad e \approx 2,71828183.$$

La valeur de  $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{10!}$  donne donc les 7 premières décimales de  $e$ , ce qu'on peut légitimement qualifier de bonne approximation !

**Exercice 2**

1. a. On a  $f(x) = 1 - x + \ln x$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0;1]$  en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et :

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}.$$

Sur  $]0;1]$ ,  $f'(x) \geq 0$  donc  $f$  est croissante.

De plus,  $f(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$  et :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (1-x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

On obtient alors le tableau :

$x$	0	1
$f$	$-\infty$	0

b. D'après ce qui précède,  $f$  est croissante sur  $]0;1]$  donc  $\forall x \in ]0;1]$ ,  $f(x) \leq f(1)$ .

Avec  $f(1) = 0$ , on obtient,  $\forall x \in ]0;1]$  :

$f(x) \leq 0$

2.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) \right) - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Et :

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{n}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n+1-n}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Ainsi, on a bien  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$u_{n+1} - u_n = f\left(\frac{n}{n+1}\right)$

Or,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < n < n+1$  donc  $0 < \frac{n}{n+1} < 1$  et comme  $f(x) \leq 0$  pour  $0 < x \leq 1$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = f\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq 0.$$

Ainsi :

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante .

3. a.  $\forall t \in [k; k+1]$ ,  $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$  donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt.$$

Or,  $\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dt = \frac{1}{k} (k+1 - k) = \frac{1}{k}$  donc  $\forall t \in [k; k+1]$  :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$

b.  $\forall n \geq 2$ , on a, en écrivant l'inégalité précédente pour  $k = 1, k = 2, \dots, k = n-1$  :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{t} dt &\leq 1 \\ \int_2^3 \frac{1}{t} dt &\leq \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt &\leq \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre, on obtient alors :

$$\int_1^2 \frac{1}{t} dt + \int_2^3 \frac{1}{t} dt + \dots + \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

En utilisant la relation de Chasles sur les intégrales, on obtient bien :

$$\int_1^n \frac{1}{t} dt \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

c. Remarquons que  $\forall n \geq 2$  :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n - \frac{1}{n} + \ln n = u_n - \frac{1}{n} + \ln n.$$

Par ailleurs :

$$\int_1^n \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^n = \ln n.$$

La relation de la question précédente se réécrit alors :

$$\ln n \leq u_n - \frac{1}{n} + \ln n \Leftrightarrow 0 \leq u_n - \frac{1}{n}.$$

Ainsi,  $\forall n \geq 2$ , on a bien :

$$\boxed{u_n \geq \frac{1}{n}}.$$

d. On a  $u_1 = 1 > 0$  et  $\forall n \geq 2, u_n \geq \frac{1}{n} > 0$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donc minorée (par 0) et elle est décroissante (d'après la question 2).

Ainsi :

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}.$$

4.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n - \frac{1}{2n}$  et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left( u_{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \right) - \left( u_n - \frac{1}{2n} \right) \\ &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \ln n - \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right] - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right] - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

avec  $g(x) = \frac{1}{2} \left( x + 1 - \frac{1}{1+x} \right) - \ln(1+x).$

La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0;1]$  en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et :

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)^2 + 1 - 2(1+x)}{2(1+x)^2} = \frac{x^2}{2(1+x)^2}.$$

Sur  $[0;1]$ ,  $g'(x) \geq 0$  donc  $g$  est croissante.

Ainsi,  $\forall x \in [0;1]$ ,  $g(x) \geq g(0)$  avec  $g(0) = \frac{1}{2}(1-1) - \ln 1 = 0$ , donc  $\forall x \in [0;1]$ ,  $g(x) \geq 0$ .

Or,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{n} \in [0;1]$  donc  $v_{n+1} - v_n = g\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$  et ainsi :

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

5.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n - v_n = u_n - \left(u_n - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$  donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

De plus, on a vu que  $u$  est décroissante et  $v$  est croissante, donc :

Les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes.

Par le théorème des suites adjacentes, les suites  $u$  et  $v$  convergent vers une même limite et en particulier, on retrouve bien le résultat de la question 3.d., soit :

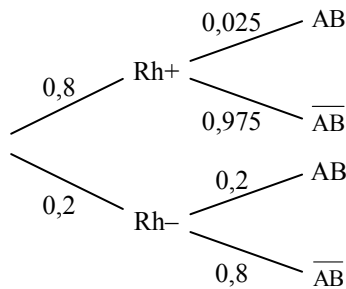
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.

### Exercice 3

1. Décryptons l'énoncé :

- Dans le village, 20 % de la population a un rhésus négatif donc  $p(\text{Rh}-) = 0,2$ .
- Comme  $\text{Rh+} = \overline{\text{Rh-}}$ , on a  $p(\text{Rh+}) = 1 - p(\text{Rh-}) = 0,8$ .
- Parmi les villageois de rhésus négatif, 1 sur 5 est du groupe AB donc  $p_{\text{Rh-}}(\text{AB}) = 0,2$ .
- Enfin, 2 % des villageois sont du groupe AB et de rhésus + donc  $p(\text{AB} \cap \text{Rh+}) = 0,02$ .
- On a alors  $p_{\text{Rh+}}(\text{AB}) = \frac{p(\text{AB} \cap \text{Rh+})}{p(\text{Rh+})} = \frac{0,02}{0,8} = 0,025$ .

On peut ainsi compléter l'arbre :



Remarquons que dans toute la suite, l'évènement « Dracula meurt » est le même que « Dracula mord un villageois de rhésus négatif ».

2. Dracula trépassé quand il mord un villageois de rhésus négatif donc la probabilité qu'il passe l'arme à gauche est :

$$p(\text{Rh-}) = 0,2.$$

3. a. Dracula trépassé en appréciant son diner s'il mord un villageois de rhésus négatif *et* du groupe AB, donc la probabilité recherchée est :

$$p(\text{AB} \cap \text{Rh-}) = p(\text{Rh-})p_{\text{Rh-}}(\text{AB}) = 0,2 \times 0,2 = 0,04.$$

b. La probabilité que Dracula apprécie son diner est  $p(\text{AB})$ . Par la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(\text{AB}) &= p(\text{Rh-})p_{\text{Rh-}}(\text{AB}) + p(\text{Rh+})p_{\text{Rh+}}(\text{AB}) \\ &= p(\text{AB} \cap \text{Rh-}) + p(\text{AB} \cap \text{Rh+}) \\ &= 0,04 + 0,02 \\ &= 0,06 \end{aligned}$$

4. Si Dracula ne croque que des villageois du groupe AB (car il sait reconnaître le groupe sanguin de ses victimes), la probabilité qu'il claqué est alors :

$$p_{\text{AB}}(\text{Rh-}) = \frac{p(\text{AB} \cap \text{Rh-})}{p(\text{AB})} = \frac{0,04}{0,06} = \frac{2}{3}.$$

5. La variable N représente le nombre de repas jusqu'au décès du Comte donc les valeurs possibles de N sont entière et strictement positives.

Sachant que Dracula ne se repait que des villageois du groupe AB et qu'il change de victime à chaque repas, le nombre maximal de repas avant l'agonie dépend fortement du nombre de villageois du groupe AB inoffensifs pour le vampire, c'est-à-dire de rhésus +. Comme, il y a 2 % de villageois de ce type et 100 villageois, cela donne 2 personnes AB+.

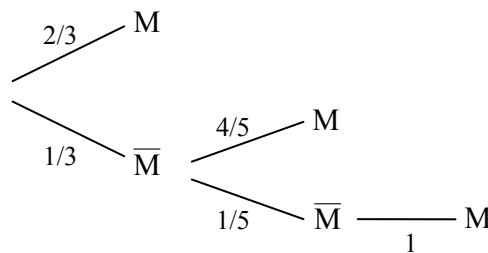
Au pire (ou au mieux pour lui !), le Comte sucera le sang de ces 2 villageois AB+ les deux premiers soirs, mais alors le troisième soir lui sera fatal. Ainsi, N vaut au plus 3 et finalement :

$$N = 1, 2 \text{ ou } 3$$

6. D'après les données, il y a 20 villageois de rhésus négatif dont un cinquième (soit 4) sont du groupe AB. En tout, il y a donc  $4 + 2 = 6$  villageois du groupe AB.

Le premier soir, Dracula a alors 4 chances sur 6 de mourir (soit 2 chances sur trois). Si ce n'est pas le cas, cela veut dire qu'il aura sucé du sang AB+ le premier soir, donc qu'il reste 4 villageois AB- et un seul AB+ donc le deuxième soir, il a encore 1 chance sur 5 de survivre.

Appelons M l'évènement « Dracula meurt ». On peut construire l'arbre suivant :



Le première branche correspond à  $N = 1$ , de probabilité  $\frac{2}{3}$ .

La deuxième branche correspond à  $N = 2$ , de probabilité  $\frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$ .

La troisième branche correspond à  $N = 3$ , de probabilité  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{15}$ .

On a ainsi la loi de N :

N	1	2	4
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

7. Le nombre moyen de repas au bout duquel Van Helsing peut espérer voir le Comte Dracula s'éteindre définitivement correspond à l'espérance de N, soit :

$$E(N) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{1}{15} = 1,4 \text{ repas}$$