

Durée 3 heures.

La calculatrice graphique est autorisée.

Une attention particulière devra être portée à la clarté et à la précision de la rédaction, éléments entrant pour une part significative dans la notation chiffrée.

Le barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 – 6 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx.$$

On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

1. Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
2. A nouveau à l'aide d'une intégration par parties, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}.$$

3. Déterminer le sens de variation de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. A l'aide du résultat précédent, prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right).$$

5. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0;1]$:

$$0 \leq (1-x)^n e^x \leq e.$$

En déduire un encadrement simple de I_n .

6. Montrer alors que $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$.

Exercice 2 – 8,5 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. On définit la fonction f sur $]0;1]$ par $f(x) = 1 - x + \ln x$.
 - a. Dresser, en justifiant, le tableau de variations complet de f sur $]0;1]$.
 - b. En déduire le signe de f sur $]0;1]$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = f\left(\frac{n}{n+1}\right)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
 - a. En remarquant que $\forall t \in [k; k+1]$, on a $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, justifier que :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \quad \text{(1)}.$$
 - b. En écrivant l'inégalité (1) pour $k = 1, k = 2, \dots, k = n-1$, justifier que $\forall n \geq 2$:

$$\int_1^n \frac{1}{t} dt \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$
 - c. En déduire que $\forall n \geq 2$, $u_n \geq \frac{1}{n}$.
 - d. Prouver alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n - \frac{1}{2n}$. Prouver que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Avertissement

*D'après Mme Bouis-Fez, cette question « déchire » ; d'après M. Lichtenberg, ça « risque d'être le massacre » ; d'après M. Caffin, « ben, quoi ? C'est facile » ...
Donc, ne perdez pas trop de temps, vous pouvez faire la question suivante en admettant le résultat de celle-ci. Mais allez, une indication :*

☺ On pourra écrire le taux de variation de v sous la forme $g\left(\frac{1}{n}\right)$ avec une fonction g astucieusement choisie et étudier g .

5. Prouver que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et retrouver le résultat de la question 3.d.

Exercice 3 – 7 points

Le Docteur Van Helsing a enfin découvert le moyen de venir à bout de son ennemi juré, le Comte Dracula. En effet, il a mis au point un élixir qui sera fatal au vampire des Carpates. Pour cela, il suffit qu'une personne dont le rhésus sanguin est négatif absorbe la potion et son sang devient un poison mortel pour Dracula.

Van Helsing se rend alors dans le hameau proche du château du Comte et convainc tous les habitants d'absorber l'élixir. Le piège est alors tendu, car tous les soirs, le vilain vampire prend son envol sous forme de chauve-souris et vient sucer le sang d'un des villageois.

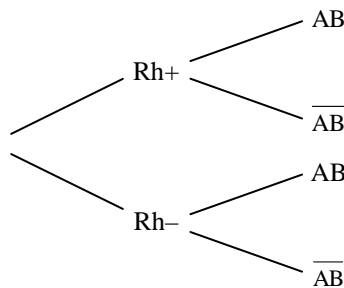
On définit les évènements suivants :

- Rh^- : « le villageois a un rhésus sanguin négatif » ;
- $Rh^+ = \overline{Rh^-}$: « le villageois a un rhésus sanguin positif » ;
- AB : « le villageois est du groupe sanguin AB ».

Dans le village, seulement 20 % de la population a un rhésus sanguin négatif et parmi ceux-ci, un cinquième est du groupe AB. Par ailleurs, 2 % des villageois sont AB^+ , c'est-à-dire du groupe AB *et* de rhésus positif.

Le soir, comme à son habitude, le Comte vient prendre son petit en-cas en choisissant sa victime au hasard parmi l'ensemble des villageois.

1. Recopier et compléter en justifiant l'arbre suivant :



2. Quelle est la probabilité que Dracula trépassse le premier soir ?
3. Il se trouve que Dracula est un fin gourmet. Alors qu'il boit un sang quelconque du bout des crocs, il apprécie particulièrement le groupe AB.
 - a. Quelle est la probabilité que Dracula apprécie son diner et trépassse ?
 - b. En déduire la probabilité que Dracula apprécie son diner.
4. En fait, le vampire a aussi un flair très affuté et il sait reconnaitre le groupe sanguin d'une personne. Ainsi, il ne boit que le sang des villageois du groupe AB (indifféremment de leur rhésus).

Dans ces conditions, montrer que Dracula a 2 chances sur 3 de trépasser le premier soir.

La suite de ces aventures palpitantes au verso...

5. Le Comte se nourrit quotidiennement (ben oui, il faut bien que ces gens bouffent...) et donc, chaque soir, il suce le sang d'un villageois (du groupe AB, bien sûr, car il n'y a pas de raison de ne pas apprécier son diner). De plus, il change de victime tous les jours car il ne veut pas épuiser trop vite son garde-manger.

On appelle N la variable aléatoire réelle donnant le nombre de repas du vampire jusqu'à son décès *après* le repas fatal (on pourra noter M cet évènement).

Sachant que le village compte 100 habitants, justifier que les valeurs possibles de N sont les entiers compris entre 1 et 3.

6. Donner alors la loi de probabilité de N (un arbre soigneusement construit pourra constituer une justification).
7. Au bout de combien de repas en moyenne, Van Helsing peut-il espérer voir le Comte Dracula s'éteindre définitivement ?