Lycée Fénelon Sainte-Marie Année 2014-2015 Mardi 14 octobre 2014	Durée : 4 heures	Terminales S67 Mathématiques DTL N°1

La calculatrice graphique est autorisée.

Le sujet comporte un total de 6 exercices
pouvant être traités dans l'ordre de votre choix.
Le barème (40 points au total) est fourni à titre indicatif.

Une importance toute particulière doit être attachée à la qualité de la rédaction, celle-ci comptant pour une part significative dans la notation.

Exercice 1 - QCM (3 *points*)

Répondre dans le tableau joint sur l'annexe.

Dans chacun des tableaux ci-dessous, une seule proposition est vraie. Vous devez indiquer laquelle sur votre copie.
Une bonne réponse rapporte 1 point.
Une réponse erronée ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2\times 5^{-n}$.

a. La suite (u_n) admet pour limite 2.	b. La suite (u_n) admet pour limite 5.
c. La suite (u_n) admet pour limite 0.	d. La suite (u_n) n'a aucune limite finie.

2. Limite ? Limite infinie ? Pas de limite ?

a. La suite $\left(\dfrac{2-(-1)^n}{1+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite 0.	b. La suite $\left(\dfrac{\sin(5n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet pour limite 5.
c. La suite $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite 0.	d. La suite $\left(\dfrac{5^n-2^n}{4^n-5^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a aucune limite finie.

3. Soit (u_n) une suite de réels pour laquelle on suppose que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$.
Alors :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$
c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^3 = +\infty$	d. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^4 = +\infty$

Exercice 2 – VRAI-FAUX (9 *points*)

Répondre dans le tableau joint sur l'annexe.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = -\dfrac{2}{u_n - 3} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$$

Indiquer, pour chacune des propositions ci-après, si elle est vraie ou fausse.
Aucune justification n'est demandée.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 < u_n < 2$

b. La suite (u_n) est croissante.

c. La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -1$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{2^n + 2}{2^n + 1}$$

e. La suite (u_n) admet une limite finie.

2. On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\dfrac{2}{u_n}$.

Indiquer, pour chacune des propositions ci-après, si elle est vraie ou fausse.
Aucune justification n'est demandée.

a. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

b. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

c. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

d. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.

Exercice 3 (7 *points*)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$$

On donne en annexe la représentation graphique de la fonction *f* définie sur $[-12\,;+\infty]$ par $f(x) = \sqrt{x+12}$.

1. Construire, sur le graphique fourni en annexe (les traits de construction devront être laissés apparents), les premiers termes de la suite (u_n).
2. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n \geq 4$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Démontrer que la suite (u_n) converge puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4 (5 *points*)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^2 - 2n + 10$$

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables
    n un entier naturel
    u un réel
Début
    n prend la valeur 0
    u prend la valeur 10
    Tant que u < 1000
            n prend la valeur n+1
            u prend la valeur n^2 − 2n + 10
    Fin Tant que
    Afficher n
Fin
```

3. Que fait cet algorithme ?
4. Soit *A* un réel positif. Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il renvoie le rang *n* à partir duquel on a : $u_n > A$? Qu'illustre alors cet algorithme ?

Exercice 5 (10 *points*)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $u_n \geq 0$.
   b) Déduisez-en que pour tout entier naturel $n \geq 5$, on a : $u_n \geq n - 3$.
   c) Déduisez-en la limite de la suite (u_n).
3. On définit la suite (v_n) par :

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   On précisera sa raison et son premier terme.
   b) Déduisez-en que pour tout entier naturel *n*, on a :

$$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

   c) Grâce à l'expression précédente de u_n, retrouver le résultat de la question 2 c).
   d) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel *n* par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

   Donner l'expression de S_n en fonction de *n*.

Exercice 6 (6 *points*)

Soit la fonction *f* définie par :

$$f(x) = \frac{-5x+1}{x-4}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction *f*.
2. Déterminer les limites de la fonction *f* aux bornes de $\mathscr{D}_f$ (on précisera la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à(aux) l'éventuelle(s) asymptote(s) horizontale(s)).
3. Etudier les variations de la fonction *f*.

Lycée Fénelon Sainte-Marie		Terminales S67
Année 2014-2015		Mathématiques
Mardi 14 octobre 2014	Durée : 4 heures	DTL N°1

NOM et PRENOM :

ANNEXE

A RENDRE AVEC LA COPIE !

Exercice 1 - QCM (3 *points*)

1	**2**	**3**

Exercice 2 – VRAI-FAUX (9 *points*)

1a	1b	1c	1d	1e

2a	2b	2c	2d