Corrigé

Exercice 1 – Que de 2… pour se mettre en jambes ! (3 *points*)

Pour tout entier naturel *n*, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n$.

Démontrer par récurrence que l'on a : $S_n = 2^{n+1} - 1$.

On considère la propriété : « $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n$ ».

<u>Initialisation.</u>
$n = 0$.
Par définition de S_n, on a : $S_0 = \sum_{k=0}^{0} 2^0 = 2^0 = 1$.
Par ailleurs, pour $n = 0$, on a : $2^{n+1} - 1 = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$
Ainsi : $S_0 = 2^{0+1} - 1$.
La propriété est donc vraie au rang $n = 0$. Elle est initialisée.

<u>Hérédité.</u>
On suppose que la propriété est vraie à un rang *N* quelconque fixée.
On a donc : $S_N = \sum_{k=0}^{N} 2^k = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^N = 2^{N+1} - 1$.
Il vient alors :

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= \sum_{k=0}^{N+1} 2^k = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^N + 2^{N+1} \\ &= S_N + 2^{N+1} \\ &= 2^{N+1} - 1 + 2^{N+1} \qquad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= 2 \times 2^{N+1} - 1 \\ &= 2^{(N+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $N + 1$. Elle est héréditaire.

Conclusion.
La propriété est initialisée au rang $n=0$ et elle est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier naturel *n*.

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 1+2^1+2^2+2^3+...+2^n = 2^{n+1}-1$$

Exercice 2 – A vous de jouer ! (4 *points*)

On s'intéresse à la suite (I_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = 1+3+5+7+...+(2n+1)$$

1. Donner les valeurs de I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 et I_5.
2. Conjecturer l'expression de I_n en fonction de *n*.
3. Démontrer la conjecture précédente à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

1. On a facilement :
   $I_0 = \boxed{1}$, $I_1 = 1+3 = \boxed{4}$, $I_2 = 1+3+5 = \boxed{9}$, $I_3 = 1+3+5+7 = \boxed{16}$,
   $I_4 = 1+3+5+7+9 = \boxed{25}$ et $I_5 = 1+3+5+7+9+11 = \boxed{36}$.

2. Les nombres encadrés ci-dessus correspondent aux carrés des premiers entiers naturels (1, 2, 3, 4, 5 et 6). On peut alors conjecturer :

$$\text{Conjecture : } \forall n \in \mathbb{N}, I_n = (n+1)^2$$

3. On considère la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = (n+1)^2$.
   Initialisation.
   $n=0$.
   On a : $I_0 = 1$ et, d'autre part : $(n+1)^2 = (0+1)^2 = 1^2 = 1$.
   La propriété est donc vraie au rang $n=0$. Elle est initiée.

   Hérédité.
   Supposons que la propriété soit vraie à un rang *N* quelconque fixée.
   On a donc : $I_N = 1+3+5+7+...+(2n+1) = (n+1)^2$.
   On s'intéresse à I_{N+1} et on veut montrer :

$$\begin{aligned} I_{N+1} &= 1+3+5+7+...+(2n+1)+(2(n+1)+1) \\ &= ((n+1)+1)^2 = (n+2)^2 \\ &= n^2+4n+4 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
I_{N+1} &= \underbrace{1+3+5+7+...+(2n+1)}_{I_N}+(2n+3)\\
&= (n+1)^2+(2n+3)\\
&= n^2+2n+1+2n+3\\
&= n^2+4n+4\\
&= (n+2)^2
\end{aligned}$$

L'égalité est bien vérifiée au rang $N+1$, la propriété est vraie à ce rang. Elle est héréditaire.

<u>Conclusion.</u>
La propriété est initialisée au rang $n=0$ et elle est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier naturel *n*.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, I_n = 1+3+5+7+...+(2n+1) = (n+1)^2}$$

Exercice 3 – Tout en variation… (3 *points*)

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout entier naturel *n*, par :

$$u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}$$
$$v_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}$$

Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que la suite (v_n) est strictement décroissante pour $n \geq 2$.

Rappel : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, n! = 1\times 2\times 3\times ...\times n$ et $0! = 1$.

Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right)\\
&= u_n+\frac{1}{(n+1)!}-u_n\\
&= \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Comme une factorielle est toujours strictement positive, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ et, finalement :

La suite (u_n) est strictement croissante.

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}\right) \\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)\times n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} \\ &= \frac{1-n}{(n+1)!} \end{aligned}$$

On a : $n \geq 2 \Leftrightarrow n > 1 \Leftrightarrow 1 - n < 0$. On en déduit alors : $v_{n+1} - v_n < 0$.

La suite (v_n) est strictement décroissante pour $n \geq 2$.

Exercice 4 – Et une suite, une ! (4 *points*)

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 > \dfrac{4}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 3x^2 - 4$.

1. Etudier les variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \dfrac{4}{3}$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ puis factoriser le trinôme $3x^2 - x - 4$.
4. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

1. La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Pour tout *x* réel, on a : $f'(x) = 6x$. On en tire immédiatement :
   - Si $x < 0$ alors $f'(x) < 0$.
   - $f'(0) = 0$.
   - Si $x > 0$ alors $f'(x) > 0$.

En en déduit alors :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

2. Soit la propriété « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{4}{3}$ ».

   Initialisation.
   $n = 0$.

   Par définition de la suite (u_n), on a $u_0 > \frac{4}{3}$.

   La propriété est donc vraie au rang $n = 0$. Elle est initialisée.

   Hérédité.
   Supposons que la propriété soit vraie à un rang *N*, entier naturel quelconque fixé.

   On suppose donc que l'on a : $u_N > \frac{4}{3}$.

   Comme la fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient : $f(u_N) > f\left(\frac{4}{3}\right)$.

   $f(u_N) = u_{N+1}$ et $f\left(\frac{4}{3}\right) = 3\times\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 = 3\times\frac{16}{9} - 4 = \frac{16}{3} - \frac{12}{3} = \frac{4}{3}$.

   Ainsi : $f(u_N) > f\left(\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow u_{N+1} > \frac{4}{3}$.

   La propriété est vraie au rang $N+1$. Elle est héréditaire.

   Conclusion.
   La propriété est initialisée au rang $n = 0$ et elle est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier naturel *n*.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{4}{3}}$$

3. $f(x) = x \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = x \Leftrightarrow 3x^2 - x - 4 = 0$.

   On peut résoudre cette dernière équation en procédant classiquement (calcul du discriminant, etc.). On peut aussi remarquer que -1 est « racine évidente ». On peut aussi se rappeler qu'à la question précédente, nous avons obtenu $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\ldots$

   On trouve facilement les deux solutions : -1 et $\frac{4}{3}$.

   Il vient alors : $3x^2 - x - 4 = 3(x+1)\left(x - \frac{4}{3}\right)$.

$$\boxed{f(x) = x \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{4}{3}.\ 3x^2 - x - 4 = 3(x+1)\left(x - \frac{4}{3}\right)}$$

4. Pour tout entier naturel n, on a, en utilisant la factorisation de la question précédente :

$$u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n = 3u_n^2-4-u_n = 3u_n^2-u_n-4 = 3(u_n+1)\left(u_n-\frac{4}{3}\right)$$

Comme on a, d'après la deuxième question, $\forall n\in\mathbb{N}, u_n>\frac{4}{3}$, il vient immédiatement :

$u_n-\frac{4}{3}>0$, $u_n+1>\frac{4}{3}+1>0$ et enfin : $u_{n+1}-u_n=3(u_n+1)\left(u_n-\frac{4}{3}\right)>0$.

On en déduit finalement :

La suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 5 – Une limite infinie. (3 *points*)

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0>1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_n=\sqrt{n+3} \end{cases}$$

Démontrer, en utilisant la définition, que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Soit A un réel positif quelconque fixé.
On cherche un rang N tel que : $n\geq N\Rightarrow u_n\geq A$.

On a : $u_n\geq A\Leftrightarrow\sqrt{n+3}\geq A\Leftrightarrow n+3\geq A^2\Leftrightarrow n\geq A^2-3$.
Le réel A^2-3 peut être strictement négatif. On doit donc, en toute rigueur distinguer deux situations :

- Si $A^2-3<0$, on prend $N=0$.
- Si $A^2-3\geq 0$, on prend pour N un entier naturel supérieur à A^2-3, par exemple $\mathrm{E}\left(A^2-3\right)+1$ (où $\mathrm{E}\left(A^2-3\right)$ désigne la partie entière de A^2-3).

Dans les deux cas, on a pu trouver N.

On peut finalement conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$$

Exercice 6 – (Presque) Un peu de tout… (3 *points*)

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = -5n^4 - 8n + 11$
2. $v_n = \dfrac{2n^5 - 4n + 17}{-13n^5 + n^4 - 1}$
3. $w_n = \dfrac{n^{12}\sqrt{n} - n^7 + 15n\sqrt{n} - 2}{7n^{15} - \sqrt{n} + 11}$

1. On a :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-5n^4\right) = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-8n\right) = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 11 = 11\end{array}\right\} \overset{\text{Somme}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-5n^4 - 8n + 11\right) = -\infty$$

$$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-5n^4 - 8n + 11\right) = -\infty}$$

2. Une analyse rapide conduit pour le numérateur et pour le dénominateur à deux formes indéterminées du type « $\infty - \infty$ ».
   On a alors, pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n = \frac{2n^5 - 4n + 17}{-13n^5 + n^4 - 1} = \frac{2n^5\left(1 - \dfrac{4n}{2n^5} + \dfrac{17}{2n^5}\right)}{-13n^5\left(1 + \dfrac{n^4}{-13n^5} - \dfrac{1}{-13n^5}\right)}$$

$$= \frac{2\left(1 + \dfrac{-2}{n^4} + \dfrac{17}{2n^5}\right)}{-13\left(1 + \dfrac{1}{-13n} + \dfrac{1}{13n^5}\right)}$$

Sachant que l'on a (limite de suites de référence) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^4} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^5} = 0$, il vient :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-2}{n^4}\right) = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{17}{2n^5}\right) = 0\end{array}\right\} \overset{\text{Somme}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{-2}{n^4} + \frac{17}{2n^5}\right) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\left(1 + \frac{-2}{n^4} + \frac{17}{2n^5}\right)\right] = 2$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{-13n}\right) = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{13n^5}\right) = 0\end{array}\right\} \overset{\text{Somme}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-13n}+\frac{1}{13n^5}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left[-13\left(1+\frac{1}{-13n}+\frac{1}{13n^5}\right)\right] = -13$$

Alors :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\left(1+\dfrac{-2}{n^4}+\dfrac{17}{2n^5}\right)\right] = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-13\left(1+\dfrac{1}{-13n}+\dfrac{1}{13n^5}\right)\right] = -13\end{array}\right\} \overset{\text{division}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty}\frac{2\left(1+\dfrac{-2}{n^4}+\dfrac{17}{2n^5}\right)}{-13\left(1+\dfrac{1}{-13n}+\dfrac{1}{13n^5}\right)} = -\frac{2}{13}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^5-4n+17}{-13n^5+n^4-1} = -\frac{2}{13}}$$

3. Une analyse rapide conduit encore pour le numérateur et pour le dénominateur à deux formes indéterminées du type « $\infty-\infty$ ».
   On a alors, pour tout entier naturel n non nul :

$$w_n = \frac{n^{12}\sqrt{n}-n^7+15n\sqrt{n}-2}{7n^{15}-\sqrt{n}+11} = \frac{n^{12}\sqrt{n}\left(1+\dfrac{-n^7}{n^{12}\sqrt{n}}+\dfrac{15n\sqrt{n}}{n^{12}\sqrt{n}}+\dfrac{-2}{n^{12}\sqrt{n}}\right)}{7n^{15}\left(1+\dfrac{-\sqrt{n}}{7n^{15}}+\dfrac{11}{7n^{15}}\right)}$$

$$= \frac{n^{12}\sqrt{n}\left(1+\dfrac{-n^7}{n^7\times n^5\sqrt{n}}+\dfrac{15n\sqrt{n}}{n^{11}\times n\sqrt{n}}+\dfrac{-2}{n^{12}\sqrt{n}}\right)}{7n^{12}\times n^2\times\sqrt{n}\times\sqrt{n}\left(1+\dfrac{-\sqrt{n}}{7n^{14}\times\sqrt{n}\times\sqrt{n}}+\dfrac{11}{7n^{15}}\right)}$$

$$= \frac{1+\dfrac{-1}{n^5\sqrt{n}}+\dfrac{15}{n^{11}}+\dfrac{-2}{n^{12}\sqrt{n}}}{7n^2\sqrt{n}\left(1+\dfrac{-1}{7n^{14}\sqrt{n}}+\dfrac{11}{7n^{15}}\right)}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{12} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{14} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$ (limites de suites de référence), il vient (produit) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^5\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{12}\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{14}\sqrt{n} = +\infty$ et donc (division) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^5\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{12}\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{14}\sqrt{n}} = 0$.

On a alors :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty}1=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{n^5\sqrt{n}}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{15}{n^{11}}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2}{n^{12}\sqrt{n}}=0\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{n^5\sqrt{n}}+\frac{15}{n^{11}}+\frac{-2}{n^{12}\sqrt{n}}\right)=1$$

Puis :

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty}1=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{7n^{14}\sqrt{n}}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{11}{7n^{15}}=0\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{-1}{7n^{14}\sqrt{n}}+\dfrac{11}{7n^{15}}\right)=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}7n^2\sqrt{n}=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{multiplication}}{\Rightarrow}\lim_{n\to+\infty}\left[7n^2\sqrt{n}\left(1+\frac{-1}{7n^{14}\sqrt{n}}+\frac{11}{7n^{15}}\right)\right]=+\infty$$

Et enfin :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{-1}{n^5\sqrt{n}}+\dfrac{15}{n^{11}}+\dfrac{-2}{n^{12}\sqrt{n}}\right)=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left[7n^2\sqrt{n}\left(1+\dfrac{-1}{7n^{14}\sqrt{n}}+\dfrac{11}{7n^{15}}\right)\right]=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{division}}{\Rightarrow}\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{-1}{n^5\sqrt{n}}+\dfrac{15}{n^{11}}+\dfrac{-2}{n^{12}\sqrt{n}}}{7n^2\sqrt{n}\left(1+\dfrac{-1}{7n^{14}\sqrt{n}}+\dfrac{11}{7n^{15}}\right)}=0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}w_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{12}\sqrt{n}-n^7+15n\sqrt{n}-2}{7n^{15}-\sqrt{n}+11}=0}$$