Lycée Fénelon Sainte-Marie		Terminales S5
Année 2015-2016		Mathématiques
Lundi 21 septembre 2015	Durée : 2 heures	DTL N°1

La calculatrice graphique est autorisée.

Le sujet comporte un total de 6 exercices
pouvant être traités dans l'ordre de votre choix.
Le barème est fourni à titre indicatif.

Une importance toute particulière doit être attachée à la qualité de la rédaction, celle-ci comptant pour une part significative dans la notation.

Exercice 1 – Que de 2… pour se mettre en jambes ! (3 *points*)

Pour tout entier naturel *n*, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n$.

Démontrer par récurrence que l'on a : $S_n = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 2 – A vous de jouer ! (4 *points*)

On s'intéresse à la suite (I_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n+1)$$

1. Donner les valeurs de I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 et I_5.
2. Conjecturer l'expression de I_n en fonction de *n*.
3. Démontrer la conjecture précédente à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 3 – Tout en variation… (3 *points*)

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout entier naturel *n*, par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$$
$$v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$$

Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que la suite (v_n) est strictement décroissante pour $n \geq 2$.

Rappel : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$ et $0! = 1$.

Exercice 4 – Et une suite, une ! (4 *points*)

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 > \dfrac{4}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f\left(u_n\right) \end{cases}$$

où *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 3x^2 - 4$.

1. Etudier les variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \dfrac{4}{3}$.
3. Résoudre l'équation $f\left(x\right) = x$ puis factoriser le trinôme $3x^2 - x - 4$.
4. Démontrer que la suite $\left(u_n\right)$ est strictement croissante.

Exercice 5 – Une limite infinie. (3 *points*)

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n+3} \end{cases}$$

Démontrer, <u>en utilisant la définition</u>, que l'on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 6 – (Presque) Un peu de tout… (3 *points*)

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = -5n^4 - 8n + 11$
2. $v_n = \dfrac{2n^5 - 4n + 17}{-13n^5 + n^4 - 1}$
3. $w_n = \dfrac{n^{12}\sqrt{n} - n^7 + 15n\sqrt{n} - 2}{7n^{15} - \sqrt{n} + 11}$