

T°S7
DTL DE MATHÉMATIQUES N°1
24/09/2013
Durée : 3h
Calculatrices autorisées

Exercice 1 : (2 points)

n est un entier naturel.

- a) Résoudre : $3n^2 - n > 100$.
- b) Déterminer l'entier n_0 à partir duquel $3n^2 - n > 100$.
- c) A est un réel strictement positif. Résoudre : $3n^2 - n > A$.
- d) Soit la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_n = 3n^2 - n$. A est un réel strictement positif. Déterminer l'entier naturel n_0 à partir duquel $3n^2 - n > A$.
- e) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2 : (2 points)

Soit $u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$ pour $n \geq 1$.

- a) Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n \in]1,9;2,1[$?
- b) Soit ε un réel strictement positif. Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n \in]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$?
- c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 : (4 points)

En utilisant les propriétés du cours (comparaison, opérations), déterminer la limite éventuelle de la suite u dans les cas suivants :

- a) $u_n = \cos n - n$
- b) $u_n = 3n + 1 + (-1)^n$
- c) $u_n = \frac{-4n^2 + 3}{n + 6}$
- d) $u_n = \frac{\sin n + 2n}{n^2 + 2}$

Exercice 4 : (2 points)

Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n , $n^3 - n$ est divisible par 3.

Exercice 5 : (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 2$.

Exercice 6 : (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$$

1. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$

Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

2. Exprimer alors (v_n) puis (u_n) en fonction de n .
3. Déterminer la limite de (v_n) , puis en déduire celle de (u_n) .

Exercice 5 : (5 points)

On considère les suites u et v définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} \end{cases} .$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 d'une part, v_1, v_2, v_3 d'autre part.
2. Dans un repère orthonormal, on a tracé D et Δ , les représentations graphiques respectives de la droite d'équation $y = x$, et de la droite d'équation $y = \frac{3x+1}{4}$. (voir annexe)
Utiliser D et Δ pour faire apparaître sur l'axe des abscisses les valeurs u_1, u_2, u_3 d'une part, v_1, v_2, v_3 d'autre part.
3. On considère la suite s définie pour tout entier naturel n par $s_n = u_n + v_n$.
 - a) Calculer s_0, s_1, s_2, s_3 . A partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite s ?
 - b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que la suite s est une suite constante.
4. On considère la suite d définie pour tout entier naturel n par $d_n = u_n - v_n$.
 - a) Montrer que la suite d est une suite géométrique.
 - b) Donner l'expression de d_n en fonction de n .
5. En utilisant les résultats des questions 3b et 4b, déterminer l'expression de u_n et v_n en fonction de n .
6. Montrer que les suites u et v convergent. Préciser leurs limites.

NOM Prénom :

