DTL de mathématiques 24-09-2013
TS5 (durée 3 heures)
Calculettes graphiques autorisées

Exercice 1 : (5p)

Déterminez la limite éventuelle de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$a)u_n = 4n^2 + \sqrt{n} - 6$ $\quad$ $b)u_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 8}{n^2 - 1}$ $\quad$ $c)u_n = -3n - 5 + (-1)^n$ $\quad$ $d)u_n = \dfrac{5 + \cos(4n)}{n^3 + 1}$

Exercice 2 : (3.5p)

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la suite (u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{4} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{4n} u_n \end{cases}$$

Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n}{4^n}$

Exercice 3 : (3.5p)

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, la suite (u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2 + 1}} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Exercice 4 : (5p)

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, la suite (u_n) telle que : $u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$

1)Calculer u_1 *et* u_2 et justifier que (u_n)n'est ni géométrique, ni arithmétique

2)Soit la suite (w_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $w_n = u_n - 6$, montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison : $q = \frac{1}{3}$

3)Exprimer alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, w_n en fonction de n

4)En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n

5)Calculer : $w_0 + w_1 + \cdots + w_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

6)En déduire : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Exercice 5 : (3p)

On définit, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 4, la suite (u_n) telle que : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$

Grâce à l'étude du quotient : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que (u_n) est décroissante

Exercice 6 : (4p)

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la suite (u_n) telle que : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1)Etudier,pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le signe de : $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation de (u_n)

2)Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

a)Vérifier que pour tout $n \geq 1$, on a : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

b)En déduire la valeur de S_n , puis celle de S_{1000}

Exercice 7 : (4p)

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la suite (u_n) telle que : $u_n = 9n^2 - 21n + 14$

1)Calculer u_1 , u_2 et u_3 en déduire que (u_n) n'est pas arithmétique et que, si (u_n) est géométrique, sa raison q peut prendre une seule valeur que l'on donnera

2)Exprimer u_{n+1} en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}^*$

3)Montrer que l'équation : $u_{n+1} = 4\,u_n$ équivaut à : $n^2 - 3n + 2 = 0$, et conclure sur la nature géométrique de (u_n)

Exercice 8 : (2p)

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, la suite (u_n) telle que :

$$u_n = \frac{1+n}{1+n+n^2+n^3}$$

a)A l'aide de la calculette, conjecturer le sens de variation de (u_n)

b)Prouvez la conjecture

Le barème est sur 30 points