Lycée Fénelon Sainte-Marie		Terminales S8
Année 2013-2014		Mathématiques
Mardi 24 septembre 2013	Durée : 3 heures	DTL N°1

La calculatrice graphique est autorisée.

Le sujet comporte un total de 6 exercices
pouvant être traités dans l'ordre de votre choix.

Le barème (40 points au total) est fourni à titre indicatif.

Une importance toute particulière doit être attachée à la qualité de la rédaction, celle-ci comptant pour une part significative dans la notation.

ATTENTION !
Pensez à rendre l'annexe complétée avec votre copie !

Exercice 1 (5 points)

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = 3n^2 - n$$

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite $\left(u_n\right)$.
2. Déterminer le plus petit entier N à partir duquel on a : $u_n > 100$.
3. Soit A un réel. Déterminer le plus petit entier N à partir duquel on a : $u_n > A$.
4. Que peut-on en conclure sur la limite de la suite $\left(u_n\right)$?

Exercice 2 (5 *points)*

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \frac{3n+1}{n+5}$$

1. En utilisant la définition, montrer que l'on a : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$.
2. Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n \in \left]2,99 ; 3,01\right[$?
3. Sans utiliser la définition, montrer que l'on a : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Exercice 3 (8 *points)*

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel *n*, on peut poser : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
3. Montrer que la suite (v_n) est géométrique (on en précisera le premier terme et la raison).
4. Pour tout entier naturel *n*, exprimer v_n en fonction de *n* puis u_n en fonction de v_n et enfin u_n en fonction de *n*.
5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4 (6 *points)*

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

3. En remarquant que, pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, démontrer par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 5 (6 *points)*

Calculer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{17n^3 - 76n^2 + 17n - 89}{15n^4 - 51} \qquad v_n = 5^n + 3\times 0,7^n - 7^n$$

$$w_n = \frac{2\times 11^n - 5^n}{-12\times 3^n - 5\times 7^n} \qquad t_n = 5\sqrt{n} - 3n^2\sqrt{n} + 11n^3$$

Exercice 6 (10 *points)*

Une revue spécialisée en géologie (Et oui !!!! Il fallait bien que ça finisse par arriver ! ☺) est diffusée uniquement par abonnement.

Une étude statistique a permis de constater que, d'une année sur l'autre, 32% des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement (Scandalous ! Isn't it ?) et 3 560 nouvelles personnes souscrivent un abonnement (Ca, c'est bien !). En 2010, il y avait 5 500 abonnés à cette revue (Une goutte d'eau … mais vous savez aussi qu'une goutte d'eau peut beaucoup ! Géologiquement parlant, bien sûr …).

1. Pour tout nombre entier naturel *n*, on note u_n le nombre d'abonnés à la revue l'année $2010+n$.
   Justifier que pour tout entier *n*, $u_{n+1} = 0,68\times u_n + 3\,560$.
2. En utilisant le graphique fourni en annexe (on fera clairement apparaître les traits de construction) :
   a. Construire les quatre premiers termes de la suite (u_n).
   b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite.
3. Démontrer par récurrence que l'on a : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n \le 11125$.
4. En utilisant les questions 1 et 3, démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel *n*, par $v_n = u_n - 11125$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprimer, pour tout entier naturel *n*, v_n en fonction de *n* puis u_n en fonction de *n*.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n).
7. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnés à la revue sera supérieur à 11 000.
8. Pour tout entier naturel *n*, exprimer $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de *n*.

NOM et PRENOM :

Annexe