

T°S
DTL 2 DE MATHÉMATIQUES
05-11-2013
Durée 3h30-Calculatrices graphiques

Corrigé

Exercice 1 : (2,5 points)

Soit la fonction f définie sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x+2}{3x-6}$

- a) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- b) Donner une interprétation graphique des résultats obtenus.
- c) Calculer $A(x) = f(x) - \frac{1}{3}$, puis étudier le signe de $A(x)$ et donner une interprétation graphique des résultats.

1) Limite en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\text{Pour tout } x \text{ réel non nul, on a : } f(x) = \frac{x+2}{3x-6} = \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{3x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{1}{3} \times \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}.$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ il vient (produit et somme) : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1.$$

$$\text{Puis (rapport) : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{1} = 1. \text{ Soit, enfin : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3} \times \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{La même démarche conduit à : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$$

Limite en 2 (à gauche et à droite).

$$\text{On a immédiatement : } \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4.$$

Par ailleurs : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (3x - 6) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} 3(x - 2) = 0^-$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (3x - 6) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} 3(x - 2) = 0^+$.

D'où : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$$

2) Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$, on a immédiatement :

La courbe représentative de la fonction f admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation

$$y = \frac{1}{3}.$$

Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$, on a immédiatement :

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

$$3) A(x) = f(x) - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{3x-6} - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{3(x-2)} - \frac{1}{3} = \frac{x+2-(x-2)}{3(x-2)} = \frac{4}{3(x-2)}.$$

Ainsi, le signe de $A(x)$ est donné par $x-2$:

- Si $x < 2$, on a $x-2 < 0$ et donc $A(x) < 0$.
- Si $x > 2$, on a $x-2 > 0$ et donc $A(x) > 0$.

Graphiquement :

Pour $x < 2$, la courbe représentative de la fonction f est située sous l'asymptote horizontale d'équation

$$y = \frac{1}{3}$$

et pour $x > 2$, elle est située au-dessus.

Exercice 2 : (2,5 points)

$$\text{Soit la fonction } f \text{ définie sur } [0; +\infty[\text{ par: } f(x) = \begin{cases} mx + 3 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{2x-1}{x+15}} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) Démontrer que f est continue en 1.

2) Pour quelle valeur de m la fonction f est-elle continue en $\frac{1}{2}$?

3) Pour la valeur de m trouvée précédemment, expliquer pourquoi f est continue sur $[0; +\infty[$.

1) On a d'abord, par définition de f : $f(1) = \sqrt{\frac{2 \times 1 - 1}{1 + 15}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$.

La fonction $x \mapsto \frac{2x-1}{x+15}$ est une fonction rationnelle et elle est définie en 1. Elle est donc continue en ce

point et on a : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x+15} = \frac{2 \times 1 - 1}{1 + 15} = \frac{2-1}{16} = \frac{1}{16}$.

La fonction racine carrée est continue sur \mathbb{R}_+ et donc en $\frac{1}{16}$ et on a : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{16}} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$.

Finalement (composition) : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \frac{1}{4} = f(1)$.

Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 1+3 = 4$ et, la fonction racine carrée étant continue en 4 : $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$.

On en déduit (composition) : $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+3} = 2$, d'où : $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3} - 2) = 0$.

Ensuite : $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$.

Ainsi, à droite de 1, nous avons affaire à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

La présence de la racine carrée au numérateur comme terme d'une différence suggère de faire intervenir l'expression conjuguée du numérateur. Pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a :

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{\sqrt{x+3}^2 - 2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+3} = 2$ (voir ci-dessus), il vient $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3} + 2) = 2 + 2 = 4$ puis :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}. \text{ Soit : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \frac{1}{4}.$$

Finalemment : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1) = \frac{1}{4}$.

La fonction f est continue en 1.

2) La fonction $x \mapsto mx + 3$ est une fonction polynôme (affine, plus précisément) et donc continue sur \mathbb{R} .

Elle l'en donc en particulier en $\frac{1}{2}$ et il vient : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (mx + 3) = m \times \frac{1}{2} + 3 = \frac{m}{2} + 3$.

On a donc : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}} f(x) = \frac{m}{2} + 3$.

On a ensuite, par définition de f : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2 \times \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 15}} = \sqrt{\frac{0}{\frac{1}{2} + 15}} = \sqrt{0} = 0$.

La fonction $x \mapsto \frac{2x-1}{x+15}$ est une fonction rationnelle et elle est définie en $\frac{1}{2}$. Elle est donc continue en ce

point et on a : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x+15} = \frac{2 \times \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 15} = \frac{1-1}{\frac{1}{2} + 15} = \frac{0}{\frac{1}{2} + 15} = 0$.

La fonction racine carrée est continue sur \mathbb{R}_+ et donc en 0 et on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$.

Finalemment (composition) : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}} f(x) = 0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

La fonction f sera continue en $\frac{1}{2}$ si, et seulement si, on a $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire :

$\frac{m}{2} + 3 = 0$, soit pour $m = -6$.

La fonction f est continue en $\frac{1}{2}$ si, et seulement si, $m = -6$.

3) Dans cette question, on suppose donc que l'on a : $m = -6$. Ainsi, la fonction f est continue en $\frac{1}{2}$.

Sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, la fonction f est une fonction polynôme. Elle y est donc continue.

Sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$, la fonction f est la composée de deux fonctions continues : la fonction $x \mapsto \frac{2x-1}{x+15}$ qui est continue sur $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ en tant que fonction rationnelle et la fonction racine carrée.

Nous avons établi ci-dessus que la fonction f était continue en 1.

La fonction affine $x \mapsto x+3$ est continue sur \mathbb{R} et donc sur $]1; +\infty[$. Elle y prend des valeurs positives.

La fonction racine carrée est continue sur \mathbb{R}_+ .

De fait la fonction composée $x \mapsto \sqrt{x+3}$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x+3}-2$ sont continues sur $]1; +\infty[$.

Enfin, la fonction affine $x \mapsto x-1$ est continue sur $]1; +\infty[$ et y prend des valeurs non nulles.

Finalement, la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ est définie et continue sur $]1; +\infty[$ comme rapport de deux fonctions définies et continues sur cet intervalle.

Etant continue sur les intervalles $\left[0; \frac{1}{2} \right[$, $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ et $]1; +\infty[$ et aux points $\frac{1}{2}$ et 1, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$.

Exercice 3 : (2 points)

f et g sont deux fonctions dont on donne le tableau de variation :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f	-3	-5	0

x	$-\infty$	$+\infty$
g	$+\infty$	$-\infty$

Déterminer en justifiant votre démarche les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de $f \circ g$.

D'après le tableau de variation de la fonction g , on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

Or, d'après le tableau de variation de la fonction f , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

On en déduit (composition) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ g)(x) = 0$.

D'après le tableau de variation de la fonction g , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Or, d'après le tableau de variation de la fonction f , on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$.

On en déduit (composition) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ g)(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = -3.$$

Exercice 4: (4 points : 0,5 par bonne réponse, -0,25 par mauvaise réponse et 0 en l'absence de réponse)

Répondre par **V**(vrai) ou **F**(faux) sur l'annexe (*on ne demande pas de justification*).

1) Si a est une valeur exclue du domaine de définition de f , alors la droite d'équation

$x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f .

FAUX

On peut par exemple citer l'exemple classique de la fonction qui à tout x réel associe $\frac{\sin x}{x}$.

Cette fonction n'est pas définie pour 0 mais on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. La courbe représentative de cette fonction n'admet donc pas d'asymptote verticale d'équation $x = 1$ (en revanche, elle est prolongeable par continuité en 0).

Plus « classiquement », vous pourrez, par exemple, considérer la fonction $x \mapsto \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ non définie en 1 mais qui admet une limite finie lorsque x tend vers 1 ...

2) Si $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow b} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

FAUX

A partir du moment où on ne précise pas si la fonction f tend vers 0 positivement ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0^+$), on ne peut conclure !

« Pire » la fonction f peut tendre vers 0 en changeant de signe « tout le temps » ! Par exemple, considérez la fonction $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Du point de vue du signe, au voisinage de 0, il s'agit d'une sorte ... d'« horreur » ! ☹

Vous n'aurez aucune difficulté à établir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ mais $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$... n'existe pas !

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 4} = 2$$

VRAI

Classiquement, pour tout réel x non nul : $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 4} = \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}$.

En tenant compte de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) = 2 + 0 = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) = 1 + 0 = 1$.

D'où (rapport) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2$.

$$4) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{g(x)+1}} = 0.$$

VRAI

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{somme} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + g(x)) = +\infty \end{array} \left. \begin{array}{l} \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \\ \text{composition} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{g(x)+1} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{composition} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{g(x)+1}} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0 \end{array}$$

$$5) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = +\infty.$$

VRAI

Pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a : $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}^2} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x-1) = 0^+ \\ \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} \sqrt{X} = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{composition} \\ \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{x-1} = 0^+ \\ \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{1}{t} = +\infty \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{composition} \\ \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty \end{array} \right\}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} = 1.$$

FAUX

La fonction considérée est rationnelle et définie en 0. Elle y est donc continue et on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} = \frac{0^2 + 0 - 1}{0^2 + 2} = \frac{-1}{2}$$

$$7) \text{ Si } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \text{ alors: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

FAUX

La fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par $g : x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ est croissante mais on a facilement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

Pour $x = 1$, elle prend la valeur 0.

On peut alors considérer la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

f est bien croissante sur \mathbb{R} (vérifiez-le !) et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

$$8) \text{ Si pour tout } x \text{ réel on a : } \frac{1}{x^2+2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2+1} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

VRAI

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2) = +\infty$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 2} = 0$.

Le théorème des gendarmes appliqué en $-\infty$ et en $+\infty$ permet alors de conclure : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 5 : (3 points)

On considère la suite (u_n) , définie par $u_0 = 2$ et pour tout n de \mathbb{N} :

$$u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}.$$

1) a) Sur l'annexe de la dernière page, on a tracé Δ d'équation: $y = x$

et \mathcal{C} , la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0,5; 4]$ par $f(x) = 4 - \frac{3}{x}$.

Utiliser ce graphique pour placer sur l'axe des abscisses, et sans effectuer de calculs, les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 .

b) Emettre des conjectures sur les variations et la convergence de (u_n) .

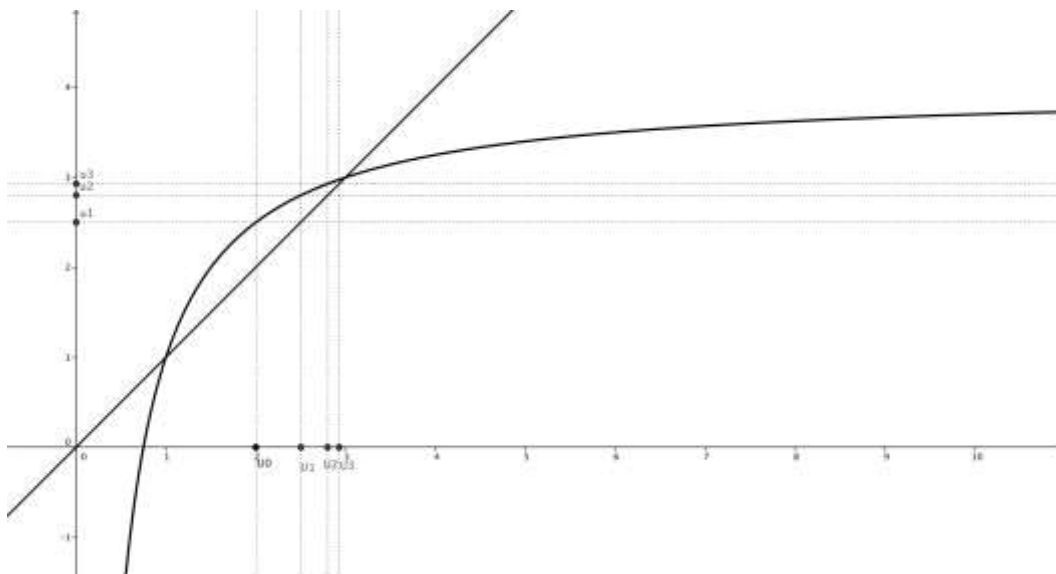
2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout n de \mathbb{N} : $2 \leq u_n \leq 3$.

b) Montrer que (u_n) est croissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente.

d) Calculer sa limite.

1)a)



b) La suite u semble croissante. De plus elle semble converger vers 3.

2)a) *Initialisation :*

$$u_0 = 2, \text{ donc } 2 \leq u_0 \leq 3.$$

La proposition est vraie pour $n = 0$.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que : $2 \leq u_n \leq 3$.

Alors comme f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, $f(2) \leq f(u_n) \leq f(3)$, soit

$$4 - \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 4 + \frac{3}{2}, \text{ soit } 2,5 \leq u_{n+1} \leq 3 \text{ soit enfin } 2 \leq u_{n+1} \leq 3.$$

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, la propriété $\boxed{2 \leq u_n \leq 3}$

est vraie pour tout entier naturel n .

b) Pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{3}{u_n} - u_n = \frac{4u_n - 3 - u_n^2}{u_n}.$$

Or nous avons démontré que $2 \leq u_n \leq 3$, donc en particulier, $u_n > 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n$ dépend du signe de son numérateur.

Le trinôme $-x^2 + 4x - 3$ possède deux racines 1 et 3. Donc d'après la règle sur le signe du trinôme, celui-ci est positif entre les racines 1 et 3, donc en particulier entre 2 et 3. Donc pour $2 \leq u_n \leq 3$, $4u_n - 3 - u_n^2 > 0$, soit $u_{n+1} - u_n > 0$.

D'où la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Nous avons démontré que pour tout entier naturel n , $2 \leq u_n \leq 3$, donc en particulier, $u_n \leq 3$, or d'après une propriété du cours, toute suite croissante et majorée converge.

Donc la suite (u_n) est convergente. Soit l sa limite.

d) La suite (u_n) est définie par $u_n = f(u_n)$ avec f continue sur $]0; +\infty[$, donc d'après une propriété du cours on a $f(l) = l$.

$$f(l) = l \Leftrightarrow 4 - \frac{3}{l} = l \Leftrightarrow \frac{-l^2 + 4l - 3}{l} = 0.$$

Nous avons vu à la question 2b que ce trinôme admettait deux racines 1 et 3.

Or $2 \leq u_n \leq 3$, donc seule la valeur 3 convient. D'où $\boxed{l = 3}$.

Exercice 6 : (2 points)

Soit (u_n) une suite définie et croissante pour $n \geq 1$, et soit (v_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$$

Montrer que (v_n) est croissante.

Pour tout $n \geq 1$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$$

donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}) - (n+1)(u_1 + u_2 + \dots + u_n)}{n(n+1)}$$

donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{nu_{n+1} - u_1 - u_2 - \dots - u_n}{n(n+1)}$$

donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(u_{n+1} - u_1) + (u_{n+1} - u_2) + \dots + (u_{n+1} - u_n)}{n(n+1)}$$

Or la suite (u_n) est croissante, donc on a :

$$u_0 < u_1 < \dots < u_n < u_{n+1}$$

Donc pour tout entier naturel i , $u_{n+1} - u_i > 0$.

Donc la somme $(u_{n+1} - u_1) + (u_{n+1} - u_2) + \dots + (u_{n+1} - u_n) > 0$.

D'où finalement, sachant que $n(n+1) > 0$,

$$\boxed{v_{n+1} - v_n > 0.}$$

Donc la suite (v_n) est strictement croissante.

Exercice 7 : (5 points)

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme

$$u_1 = \frac{3}{2} \text{ et la relation de récurrence : } u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}.$$

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre. Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur ... Affecter à n la valeur ... Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique; préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

1. Affecter à u la valeur
$$\frac{n \times u + 1}{2 \times (n + 1)}$$
Affecter à n la valeur $n + 1$.
2. Il faut rajouter avant le Fin Tant Que : « Afficher la variable u ».
3. La suite u semble être décroissante et converger vers 0.

Partie B :

1. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} - 1 = (n+1) \frac{nu_n + 1}{2(n+1)} - 1 = \frac{nu_n + 1}{2} - \frac{2}{2} = \frac{nu_n - 1}{2}$$

D'où

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de 1^{er} terme $v_1 = 1u_1 - 1 = 0,5$ et de raison $q = 0,5$.

2. Donc pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = v_1 q^{n-1} = 0,5 \times (0,5)^{n-1} = (0,5)^n$.

Or $v_n = nu_n - 1$, d'où

$$u_n = \frac{v_n + 1}{n}$$

soit

$$u_n = \frac{(0,5)^n + 1}{n}$$

3. $0 < q < 1$ donc la suite v converge vers 0, soit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^n = 0.$$

Donc en utilisant les opérations sur les limites :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^n + 1 = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \end{array} \right\} \text{par quotient } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

4. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(0,5)^{n+1} + 1}{n+1} - \frac{(0,5)^n + 1}{n} = \frac{0,5(0,5)^n n + n - (n+1)(0,5)^n - n - 1}{n(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(0,5)^n [0,5n - n - 1] - 1}{n(n+1)}$$

D'où :

$$u_{n+1} - u_n = - \frac{(0,5)^n [0,5n + 1] + 1}{n(n+1)}$$

Comme $n > 0$, il est clair que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

Donc la suite u est strictement décroissante.

Partie C :

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $u \geq 0,001$ Affecter à u la valeur $\frac{n \times u + 1}{2 \times (n + 1)}$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable n