T°S

DTL 2 DE MATHEMATIQUES

05-11-2013

Durée 3h30-Calculatrices graphiques

Exercice 1 : (2,5 points)

Soit la fonction f définie sur $]-\infty; 2[\, \cup\,]2; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x+2}{3x-6}$

1)a) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

b) Donner une interprétation graphique des résultats obtenus.

c) Calculer $A(x) = f(x) - \dfrac{1}{3}$, puis étudier le signe de $A(x)$ et donner une interprétation graphique des résultats.

Exercice 2 : (2,5 points)

Soit la fonction f définie sur$[0; +\infty[$ par: $f(x) = \begin{cases} mx + 3 \quad si\ 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+15}} \quad si\ \ \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \quad si\ x > 1 \end{cases}$

1)Démontrer que f est continue en 1.

2)Pour quelle valeur de m la fonction f est $-$ elle continue en $\dfrac{1}{2}$?

3)Pour la valeur de m trouvée précedemment, expliquer pourquoi f est continue sur $[0; +\infty[$.

Exercice 3 : (2 points)

f et g sont deux fonctions dont on donne le tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	-3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0

x	$-\infty$		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Déterminer en justifiant votre démarche les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de $f \circ g$.

Exercice 4: (4 points : 0,5 par bonne réponse, -0,25 par mauvaise réponse et 0 en l'absence de réponse)

Répondre par **V**(vrai) ou **F**(faux) sur l'annexe (***on ne demande pas de justification***).

1) Si a est une valeur exclue du domaine de définition de f, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f.

2) Si $\lim_{x\to b} f(x) = 0$ alors $\lim_{x\to b} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-4} = 2$

4) Si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{g(x)+1}} = 0$.

5) $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = +\infty$.

6) $\lim_{x\to0} \frac{x^2+x-1}{x^2+2} = 1$.

7) Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

8) Si pour tout x réel on a : $\frac{1}{x^2+2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Exercice 5 : (3 points)

On considère la suite (u_n), définie par $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}.$$

1)a) Sur l'annexe de la dernière page , on a tracé Δ d'équation: $y = x$ et $\mathcal{C}$, la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0,5; 4]$ par $f(x) = 4 - \frac{3}{x}$.

Utiliser ce graphique pour placer sur l'axe des abscisses, et sans effectuer de calculs, les termes u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) Emettre des conjectures sur les variations et la convergence de (u_n).

2)a) Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $2 \leq u_n \leq 3$.

b) Montrer que (u_n) est croisssante.

c) En déduire que (u_n) est convergente.

d) Calculer sa limite.

Exercice 6 : (2 points)

Soit (u_n) une suite définie et croissante pour $n \geq 1$, et soit (v_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

Montrer que (v_n) est croissante.

Exercice 7 : (5 points)

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur … Affecter à n la valeur … Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	…	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	…	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

NOM, Prénom :

ANNEXE :

Exercice 4 :

1	2	3	4	5	6	7	8

Exercice 5 :