La calculatrice graphique est autorisée.

Le sujet comporte un total de 5 exercices
pouvant être traités dans l'ordre de votre choix.
Le barème, sur un total de 22 points,est fourni à titre indicatif.

Une importance toute particulière doit être attachée à la qualité de la rédaction.

Exercice 1 (4*points*)

Répondre par V(vrai) ou F(faux) sur votre copie. (*Aucune justification n'est demandée*)

1. La courbe représentative de la fonction définie sur $]2;+\infty[$par
$$f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$$
admet une asymptote verticale d'équation $x=2$.
V :
$$f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$
$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty$$

2. Si pour tout réel x on a
$$\frac{1}{x^2+2}\leq f(x)\leq \frac{1}{x^2+1}$$
alors,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$
V : Théorème des gendarmes.

3. Si
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$
alors
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{f(x)+1}}=0$$
V : Limite de fonctions composées puis limite d'un quotient.

4. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

F : Contre-exemple : f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x+2 \text{ si } x\leq 2\\ \frac{x+2}{x+3} \text{ si } x>2\end{cases}$
f est croissante sur $\mathbb{R}$et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

5. Si a est une valeur exclue du domaine de définition de f, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f.

F : Contre-exemple : f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = 4 \neq +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = 4 \neq -\infty$$

Pour les questions 6, 7 et 8, on considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et dont aucun terme n'est nul.

6. Si $({u_n}^2)$ converge, alors (u_n) converge.

F : Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$

Alors ${u_n}^2 = 1$.

$({u_n}^2)$ converge vers 1, alors que (u_n) diverge.

7. Si (u_n) est minorée par 2, alors la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$v_n = \frac{-2}{u_n}$$

est minorée par -1.

V : Pour tout entier naturel n, $u_n > 2$

donc $0 < \frac{1}{u_n} < \frac{1}{2}$ (stricte croissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$),

d'où $\frac{-2}{u_n} > \frac{-2}{2}$, soit $v_n > -1$.

8. Si

$$\lim_{n\to+\infty} {u_n}^2 = +\infty$$

alors ou bien

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

ou bien

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

F : Contre-exemple : $u_n = n(-1)^n$

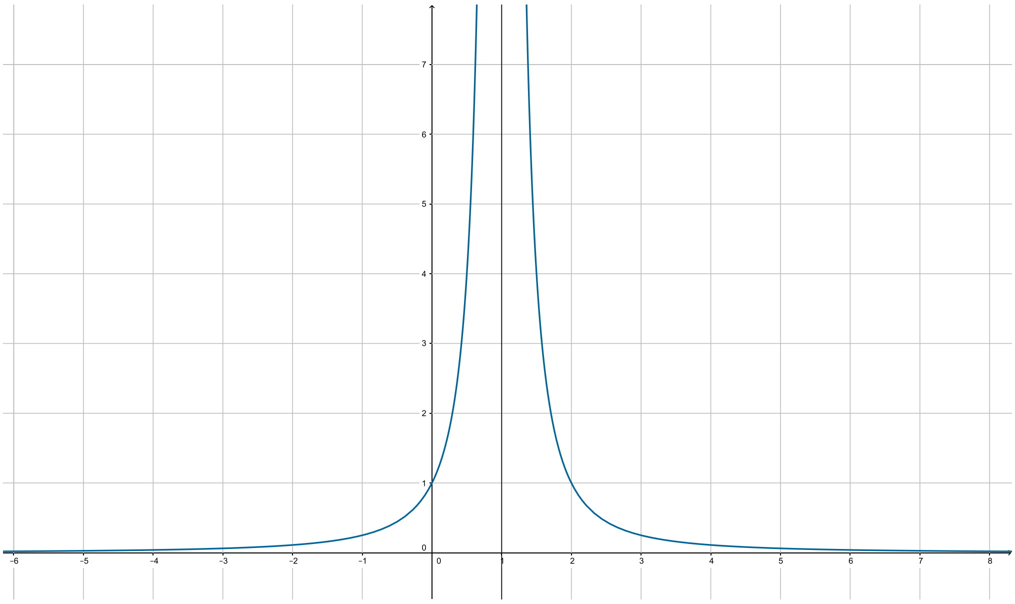
Alors ${u_n}^2 = n^2$.

$$\lim_{n\to+\infty} {u_n}^2 = +\infty$$

mais $\lim_{n\to+\infty} u_n$ varie suivant la parité de n.

Exercice 2 (3*points*)

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$:



Déterminer, en justifiant :

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{f(x)}$

b. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{f(x)}$

c. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{f(x)}$

d. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{f(x)}$

CORRECTION :

a.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{X\to +\infty} \frac{1}{X} = 0$$

Par composée

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{f(x)} = 0$$

b.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0^+$$

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{1}{X} = +\infty$$

Par composée

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

c.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$$

$$\lim_{X\to 0^+} \sqrt{X} = 0^+$$

Par composée

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{f(x)} = 0^+$$

d.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Par composée

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{f(x)} = +\infty$$

Exercice 3 (3*points*)

On considère la fonction *f* définie sur ℝ par :

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{E}(\sin x)+1 \ \text{ pour } x\in[0;p] \\ 3x+m \ \text{ pour } x>p \end{cases}$$

où E désigne la fonction partie entière.

1. Simplifier l'expression de f pour $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

   CORRECTION :

   Pour tout réel *x* dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ ou dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, on a $\sin x\in[0\,;1[$ et donc $\mathrm{E}(\sin x)=0$. D'où $\boxed{f(x)=1}$.

2. La fonction *f* est-elle continue en $\frac{\pi}{2}$?

   CORRECTION :

   La fonction *f* est continue en $\frac{\pi}{2}$ si, et seulement si, on a :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2},\,x<\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2},\,x>\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

   D'après la question précédente, on a, la fonction f étant constante sur les intervalles $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et y prenant la valeur 1 : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2},\,x<\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2},\,x>\frac{\pi}{2}} f(x)=1$.

Par ailleurs : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{E}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)+1=\mathrm{E}(1)+1=1+1=2$.

On a donc : $1=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2},\, x<\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2},\, x>\frac{\pi}{2}} f(x)\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas continue en } \frac{\pi}{2}}$.

3. Pour quelle valeur de m la fonction f est-elle continue en π ?

CORRECTION :

La fonction f est continue en π si, et seulement si, on a :

$$\lim_{x\to\pi,\, x<\pi} f(x)=\lim_{x\to\pi,\, x>\pi} f(x)=f(\pi)$$

A la question 1, on a vu que l'on avait : $\forall x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right],\ f(x)=1$.

On a donc déjà : $\lim\limits_{x\to\pi,\, x<\pi} f(x)=f(\pi)=1$.

Pour $x>\pi$, on a : $f(x)=3x+m$. La fonction f étant affine sur l'intervalle $]\pi;+\infty[$, il vient immédiatement : $\lim\limits_{x\to\pi,\, x>\pi} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi,\, x>\pi}(3x+m)=3\pi+m$. Ainsi, la fonction f sera continue en π si, et seulement si : $3\pi+m=1$, soit $\boxed{m=1-3\pi}$.

Exercice 4 (4*points*)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, :

$$u_{n+1}=4-\frac{3}{u_n}$$

1. a) Sur l'annexe de la dernière page, on a tracé la droite Δ d'équation $y=x$ et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0,5;4]$ par : $f(x)=4-\frac{3}{x}$.

   Utiliser ce graphique pour placer sur l'axe des abscisses, et sans effectuer de calculs, les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 (on fera clairement apparaître les traits de construction).

   b) Emettre des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (u_n).

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $2\le u_n\le 3$.

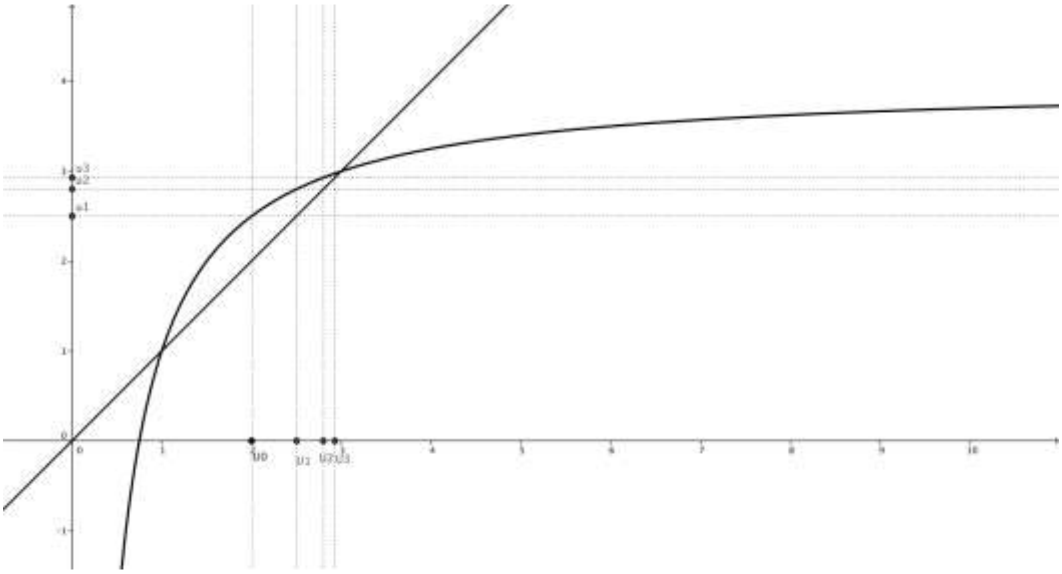
   b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   c) Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est convergente.

   d) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

CORRECTION :

1)a)



b) La suite u semble croissante. De plus elle semble converger vers 3.

2)a) *Initialisation :*

$$u_0 = 2, \text{donc } 2 \leq u_0 \leq 3.$$

La proposition est vraie pour $n = 0$.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que : $2 \leq u_n \leq 3$.

Alors comme f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, $f(2) \leq f(u_n) \leq f(3)$, soit

$$4 - \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 4 + \frac{3}{2}, \text{soit } 2{,}5 \leq u_{n+1} \leq 3 \text{ soit enfin } 2 \leq u_{n+1} \leq 3.$$

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, la propriété $\boxed{2 \leq u_n \leq 3}$ est vraie pour tout entier naturel n.

b) Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{3}{u_n} - u_n = \frac{4u_n - 3 - {u_n}^2}{u_n}.$$

Or nous avons démontré que $2 \leq u_n \leq 3$, donc en particulier, $u_n > 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n$ dépend du signe de son numérateur.

Le trinôme $-x^2 + 4x - 3$ possède deux racines 1 et 3. Donc d'après la règle sur le signe du trinôme, celui-ci est positif entre les racines 1 et 3, donc en particulier entre 2 et 3. Donc pour $2 \leq u_n \leq 3$, $4u_n - 3 - {u_n}^2 > 0$, soit $u_{n+1} - u_n > 0$.

D'où la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Nous avons démontré que pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq 3$, donc en particulier, $u_n \leq 3$, or d'après une propriété du cours, toute suite croissante et majorée converge.

Donc la suite (u_n) est convergente. Soit l sa limite.

d) La suite (u_n) est définie par $u_n = f(u_n)$ avec f continue sur $]0;+\infty[$, donc d'après une propriété du cours on a $f(l) = l$.

$$f(l) = l \Leftrightarrow 4 - \frac{3}{l} = l \Leftrightarrow \frac{-l^2 + 4l - 3}{l} = 0.$$

Nous avons vu à la question 2b que ce trinôme admettait deux racines 1 et 3.
Or $2 \leq u_n \leq 3$, donc seule la valeur 3 convient. D'où $\boxed{l = 3.}$

Exercice 5 (6*points*)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère.

1. Préciser le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f.

CORRECTION :

La fonction f est une fonction rationnelle. Elle est donc définie pour tout réel n'annulant pas son dénominateur.

On a : $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -2$.

Finalement : $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;-1\}}$

2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x de $\mathscr{D}$ on ait :

$$f(x) = 1 + \frac{ax + b}{x^2 + 3x + 2}$$

CORRECTION :

Pour tout réel x de $\mathscr{D}$:

$$\begin{aligned}
&f(x) = 1 + \frac{ax+b}{x^2+3x+2} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{x^2+4x+2}{x^2+3x+2} = 1 + \frac{ax+b}{x^2+3x+2} \\
\Leftrightarrow\ &x^2+4x+2 = x^2+3x+2+ax+b \\
\Leftrightarrow\ &4x+2 = (3+a)x+2+b \\
\Leftrightarrow\ &(1-a)x+b = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x)=1+\frac{x}{x^2+3x+2}}$$

On pouvait également écrire :

$$f(x)=\frac{x^2+4x+2}{x^2+3x+2}=\frac{x^2+3x+2+x}{x^2+3x+2}=\frac{x^2+3x+2}{x^2+3x+2}+\frac{x}{x^2+3x+2}=1+\frac{x}{x^2+3x+2}$$

3. Déterminer les limites de *f* aux bornes de $\mathscr{D}$.
   Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'asymptote horizontale.

CORRECTION :

On a $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\,;-1\}=]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$.

On doit donc déterminer les (éventuelles) limites de *f* en $-\infty$, $+\infty$, -2 (à gauche et à droite) et -1 (à gauche et à droite).

Pour tout réel x non nul de $\mathscr{D}$, on a :

$$f(x)=1+\frac{x}{x^2+3x+2}=1+\frac{x}{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=1+\frac{1}{x\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

On a :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}=0\end{array}\right\}\overset{\text{addition}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\end{array}\right\}\overset{\text{multiplication}}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\right]=-\infty$$

On en déduit finalement : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\frac{1}{x\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=1$

.

On procède de façon analogue en $+\infty$ et on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=1$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=1}$$

On en déduit immédiatement que la courbe représentative de la fonction *f* admet, en $-\infty$ et $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=1$.

Pour étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale, on étudie le signe de la différence $f(x)-1$.

On a immédiatement, d'après la question 2 : $f(x)-1=\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{x}{(x+1)(x+2)}$.

4. a. Montrer que pour tout réel x de $\mathscr{D}$, on a :

$$f'(x) = \frac{-x^2+2}{(x^2+3x+2)^2}$$

CORRECTION :

$f(x) = 1 + \frac{x}{x^2+3x+2} = 1 + \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x+3$.

On a alors :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{1\times(x^2+3x+2) - x\times(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2+3x+2-2x^2-3x}{(x^2+3x+2)^2} = \frac{-x^2+2}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x^2+2}{(x^2+3x+2)^2}}$$

b. Etudier les variations de *f*.

CORRECTION :

Le dénominateur de $f'(x)$ étant strictement positif (carré non nul), le signe de $f'(x)$ est donné par son numérateur. Celui-ci étant un trinôme du second degré de racines $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ et dont le coefficient de « x^2 » est strictement négatif, on a :

- Pour tout réel x de $\left]-\infty\,;-\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}\,;+\infty\right[$, on a $f'(x) < 0$.
- $f'(-\sqrt{2}) = f'(\sqrt{2}) = 0$.
- Pour tout réel x de $\left]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right[$, on a $f'(x) > 0$.

En tenant compte des valeurs interdites de *f*, on obtient finalement :

- La fonction *f* est strictement décroissante sur les intervalles $\left]-\infty\,;-2\right[$, $\left]-2\,;-\sqrt{2}\right]$ et $\left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$.
- La fonction *f* est strictement croissante sur les intervalles $\left[-\sqrt{2}\,;-1\right[$ et $\left]-1\,;\sqrt{2}\right]$.

On déduit de l'étude de ces variations que la fonction *f* admet un minimum sur l'intervalle $\left]-2\,;-1\right[$ (minimum atteint en $-\sqrt{2}$) et un maximum sur l'intervalle $\left]-1\,;+\infty\right[$ (maximum atteint en $\sqrt{2}$).

5. Dresser le tableau de variation de *f*.
   On donnera les valeurs exactes du minimum atteint par *f* sur l'intervalle $\left]-2\,;-1\right[$ et du maximum atteint par *f* sur l'intervalle $\left]-1\,;+\infty\right[$.

CORRECTION :

On a :

$$f\left(-\sqrt{2}\right)=1+\frac{-\sqrt{2}}{\left(-\sqrt{2}\right)^{2}+3\times\left(-\sqrt{2}\right)+2}=1+\frac{-\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}$$

$$=1+\frac{-\sqrt{2}\left(4+3\sqrt{2}\right)}{\left(4-3\sqrt{2}\right)\left(4+3\sqrt{2}\right)}=1+\frac{-6-4\sqrt{2}}{16-18}=1+3+2\sqrt{2}$$

$$=4+2\sqrt{2}$$

$$f\left(\sqrt{2}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^{2}+3\times\sqrt{2}+2}=1+\frac{\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}\left(4-3\sqrt{2}\right)}{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(4-3\sqrt{2}\right)}=1+\frac{-6+4\sqrt{2}}{16-18}=1+3-2\sqrt{2}$$

$$=4-2\sqrt{2}$$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$		
$f'(x)$		-	||	-	0	+	||	+	0	-	
f	1 $\searrow$		$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$4+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$4-2\sqrt{2}$	$\searrow$	1

6. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

CORRECTION :

L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 s'écrit
$y = f'(0)\times(x-0)+f(0) = f'(0)\times x + f(0)$.

Or : $f'(0) = \dfrac{-0^2+2}{\left(0^2+3\times0+2\right)^2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $f(0) = 1+\dfrac{0}{0^2+3\times0+2} = 1$. D'où :

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x+1}$$

7. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β telles que $\alpha\in[-4\,;-3]$ et $\beta\in\,]-1\,;0]$.

CORRECTION :

En tant que fonction rationnelle, la fonction *f* est continue sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition. Elle est donc continue sur $[-4\,;-3]$ et sur $]-1\,;0]$.

La fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-2[$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-1\,;\sqrt{2}\right]$. Elle est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[-4\,;-3]$ et strictement croissante sur l'intervalle $]-1\,;0]$.

On a $f(-4) = \dfrac{(-4)^2+4\times(-4)+2}{(-4)^2+3\times(-4)+2} = \dfrac{16-16+2}{16-12+2} = \dfrac{1}{3} > 0$ et

$f(-3) = \dfrac{(-3)^2+4\times(-3)+2}{(-3)^2+3\times(-3)+2} = \dfrac{9-12+2}{9-9+2} = \dfrac{-1}{2} < 0$.

Ainsi, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-4\,;-3]$.

Par ailleurs, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$ et $f(0) = \dfrac{0^2+4\times0+2}{0^2+3\times0+2} = \dfrac{2}{2} = 1 > 0$.

Ainsi, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-1\,;0]$.

Sur $]-\infty\,;-4]$, la fonction *f* est strictement décroissante : $x\leq-4 \Leftrightarrow f(x)\geq f(-4)=\dfrac{1}{3}>0$. La fonction *f* ne s'annule donc pas sur cet intervalle.

Sur $]-2\,;-1[$, la fonction *f* atteint un minimum en $-\sqrt{2}$ et ce minimum vaut $2\left(2+\sqrt{2}\right)>0$. La fonction *f* ne s'annule donc pas sur cet intervalle.

Sur $\left[0\,;\sqrt{2}\right]$, la fonction *f* est strictement croissante : $0 \le x \le \sqrt{2} \Rightarrow f(x) \ge f(0) = 1 > 0$.
La fonction *f* ne s'annule donc pas sur cet intervalle.

Sur $\left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$, la fonction est strictement décroissante et admet 1 comme limite en $+\infty$.
Elle est donc minorée par sa limite et, de fait, ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ s'annule exactement deux fois sur } \mathscr{D} : \\ \text{pour } \alpha \text{ dans } [-4\,;-3] \text{ et pour } \beta \text{ dans }]-1\,;0].\end{array}}$$

b. A l'aide de la calculatrice, donner pour α et β un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
On explicitera la démarche.

CORRECTION :

Encadrement de α.

On tabule la fonction *f* sur l'intervalle $[-4\,;-3]$ avec un pas de 0,1 et on obtient $-3,5 < \alpha < -3,4$.

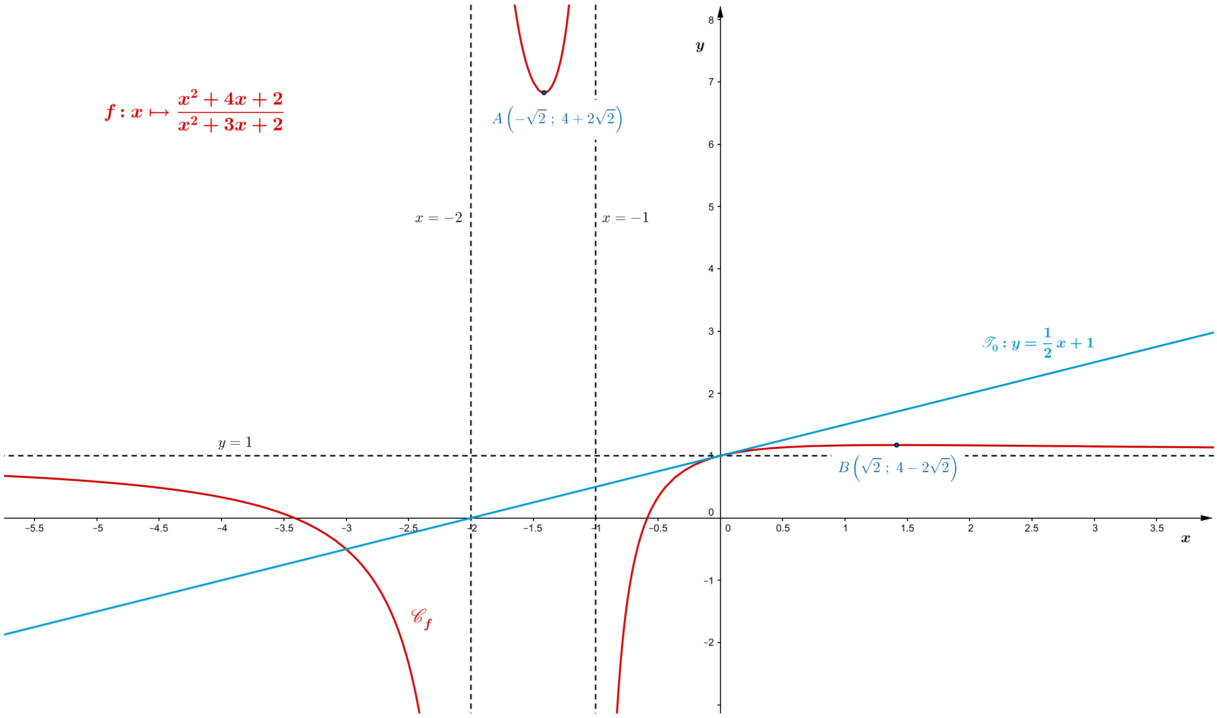
On tabule ensuite la fonction *f* sur l'intervalle $[-3,5\,;-3,4]$ avec un pas de 0,01 et on obtient $-3,42 < \alpha < -3,41$.

On tabule la fonction *f* à partir de 0 avec un pas négatif de $-0,1$ et on obtient $-0,6 < \beta < -0,5$.

On tabule ensuite la fonction *f* sur l'intervalle $[-0,6\,;-0,5]$ avec un pas de 0,01 et on obtient $-0,59 < \beta < -0,58$.

$$\boxed{\begin{array}{c}-3,42 < \alpha < -3,41 \\ -0,59 < \beta < -0,58\end{array}}$$

A titre de complément, nous fournissons la représentation graphique suivante :



Exercice 6 (2*points*)

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq 1$ et croissante.

Soit alors (v_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

Montrer que (v_n) est croissante.

CORRECTION :

Pour tout $n \geq 1$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1}) - (n+1)(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)}{n(n+1)}$$

donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{nu_{n+1} - u_1 - u_2 - \cdots - u_n}{n(n+1)}$$

d'où

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(u_{n+1} - u_1) + (u_{n+1} - u_2) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)}{n(n+1)}$$

Or la suite (u_n) est croissante, donc on a :

$$u_0 < u_1 < \cdots < u_n < u_{n+1}$$

Donc pour tout entier naturel $i, u_{n+1} - u_i > 0$.
Donc la somme $(u_{n+1} - u_1) + (u_{n+1} - u_2) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) > 0$.
D'où finalement, sachant que $n(n+1) > 0$,

$$\boxed{v_{n+1} - v_n > 0.}$$

Donc la suite (v_n) est strictement croissante.