La calculatrice graphique est autorisée.

Le sujet comporte un total de 5 exercices
pouvant être traités dans l'ordre de votre choix.
Le barème, sur un total de 22 points, est fourni à titre indicatif.

Une importance toute particulière doit être attachée à la qualité de la rédaction.

Exercice 1 (4 *points*)

Répondre par V(vrai) ou F(faux) sur votre copie. (*Aucune justification n'est demandée*)

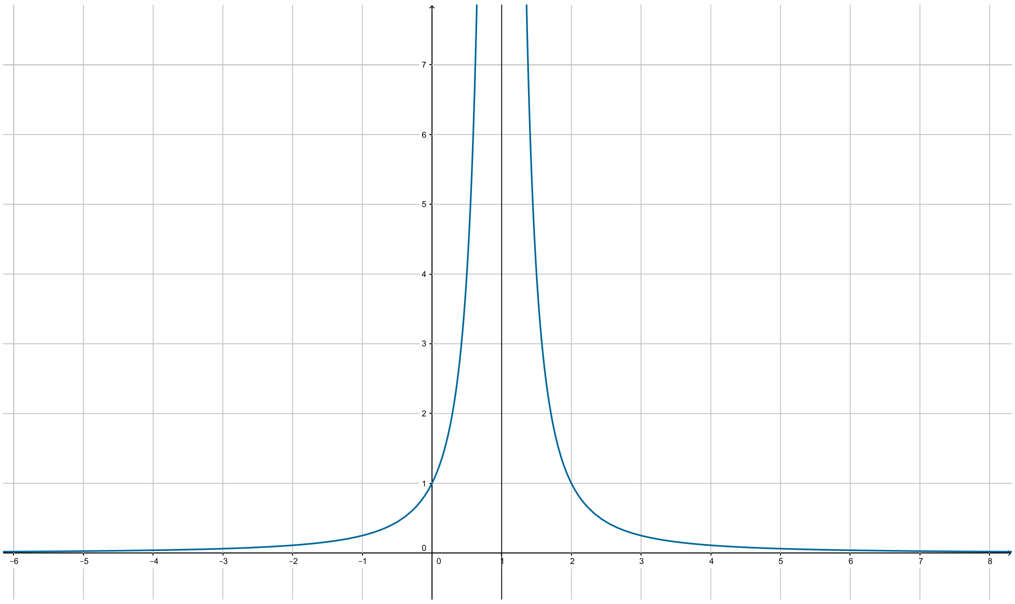
1. La courbe représentative de la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par
$$f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$$
admet une asymptote verticale d'équation $x=2$.
2. Si pour tout réel x on a
$$\frac{1}{x^2+2}\leq f(x)\leq\frac{1}{x^2+1}$$
alors,
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$
3. Si
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$
alors
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{f(x)+1}}=0$$
4. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
5. Si a est une valeur exclue du domaine de définition de f, alors la droite d'équation $x=a$ est asymptote à la courbe représentative de f.

Pour les questions 6, 7 et 8, on considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et dont aucun terme n'est nul.

6. Si $({u_n}^2)$ converge, alors (u_n) converge.
7. Si (u_n) est minorée par 2, alors la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$v_n=\frac{-2}{u_n}$$
est minorée par -1.
8. Si
$$\lim_{n\to+\infty}{u_n}^2=+\infty$$
alors ou bien
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$$
ou bien
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty$$

Exercice 2 (3 *points*)

Voici la courbe représentative d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$:



Déterminer, en justifiant :

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \dfrac{1}{f(x)}$

b. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{f(x)}$

c. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{f(x)}$

d. $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \sqrt{f(x)}$

Exercice 3 (3 *points*)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{E}(\sin x)+1 \text{ pour } x \in [0;p] \\ 3x+m \text{ pour } x > p \end{cases}$$

où E désigne la fonction partie entière.

1. Simplifier l'expression de f pour $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

2. La fonction *f* est-elle continue en $\dfrac{\pi}{2}$?

3. Pour quelle valeur de *m* la fonction *f* est-elle continue en π ?

Exercice 4 (4 *points*)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, :

$$u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}$$

1. a) Sur l'annexe de la dernière page, on a tracé la droite Δ d'équation $y = x$ et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction *f* définie sur $[0,5\,;4]$ par : $f(x) = 4 - \dfrac{3}{x}$.
   Utiliser ce graphique pour placer sur l'axe des abscisses, et sans effectuer de calculs, les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 (on fera <u>clairement</u> apparaître les traits de construction).

   b) Emettre des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (u_n).

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout n de ℕ, on a : $2 \le u_n \le 3$.

   b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   c) Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est convergente.

   d) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5 (6 *points*)

Soit *f* la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère.

1. Préciser le domaine de définition $\mathscr{D}$ de *f*.
2. Déterminer les réels *a* et *b* tels que pour tout réel *x* de $\mathscr{D}$ on ait :

$$f(x) = 1 + \frac{ax + b}{x^2 + 3x + 2}$$

3. Déterminer les limites de *f* aux bornes de $\mathscr{D}$.
   Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'asymptote horizontale.
4. a. Montrer que pour tout réel *x* de $\mathscr{D}$, on a :

$$f'x) = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 + 3x + 2)^2}$$

   b. Etudier les variations de *f*.
5. Dresser le tableau de variation de *f*.
   On donnera les valeurs exactes du minimum atteint par *f* sur l'intervalle $]-2\,;-1[$ et du maximum atteint par *f* sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

6. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
7. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β telles que $\alpha \in [-4; 3]$ et $\beta \in]-1; 0]$.

   b. A l'aide de la calculatrice, donner pour α et β un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
   On explicitera la démarche.

Exercice 5 (2 *points*)

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq 1$ et croissante.

Soit alors (v_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

Montrer que (v_n) est croissante.

NOM, Prénom :

Exercice 4 :