DTL 3 TS 15/16
18/01/2016
CORRIGE

PARTIE 1
EXERCICE 1
a) F b) V c) F d) F

EXERCICE 2
a) F b) F c) V d) V

EXERCICE 3
a) V b) V c) V d) V

PARTIE 2
EXERCICE 4

Partie A : étude de fonction

1. Pour tout réel x on a $f(x) = x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1} + 1$, or (croissances comparées) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, donc, par opérations sur les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.
   On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.
2. On a $f(x) = x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1} + 1$, et, par opérations sur les limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici) : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Par opérations usuelles sur les dérivées :
$$f'(x) = 1\mathrm{e}^{x-1} + x \times 1 \times \mathrm{e}^{x-1} = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}.$$
4. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+1$. Or $x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$, on en déduit donc le tableau de variation suivant :

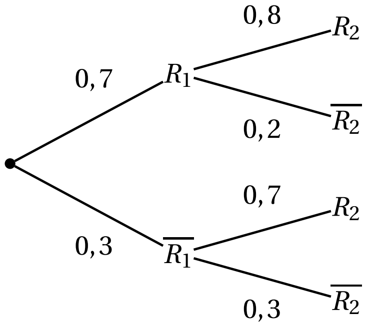
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$1-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

1. La tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire :
$$y = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(x-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1.$$
2. Soit $a > 0$, alors :
$$\begin{aligned} \mathrm{O}(0\,;\,0) \in \mathrm{T}_a &\iff 0 = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1 \\ &\iff 0 = \mathrm{e}^{a-1}(-a^2 - a + a) + 1 \\ &\iff 1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0. \end{aligned}$$
3. - 1 est une solution de l'équation considérée car $1 - 1^2\mathrm{e}^{1-1} = 1 - 1 = 0$.
   - Montrons maintenant que cette équation n'admet qu'une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
     Posons, pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{x-1}$. La fonction g est alors dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$:
     $$g'(x) = -2x\mathrm{e}^{x-1} - x^2\mathrm{e}^{x-1} = -x(2+x)\mathrm{e}^{x-1}.$$
     $x > 0$, donc $x+2 > 0$ et par ailleurs $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, on en déduit que $g'(x) < 0$ et donc que g est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
     Par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
     On sait que g est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et s'annule en 1.
     Donc si $x < 1$, alors $g(x) > g(1)$ soit $g(x) > 0$ et de même si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$ donc $g(x) < 0$.
     Conclusion : sur $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) = 0 \iff x = 1$.
4. La tangente cherchée est T_1, elle a pour équation $y = 2(x-1) + 2$, c'est-à-dire $y = 2x$

EXERCICE 5

1. **a.** On a l'arbre de probabilités suivant :

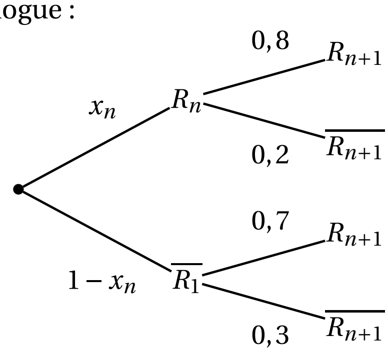


On a $p(X = 2) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$;
$p(X = 1) = 0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,7 = 0,14 + 0,21 = 0,35$;
$p(X = 0) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$

b. $\mathrm{E}(X) = 2 \times 0,56 + 1 \times 0,35 + 0 \times 0,09 = 1,12 + 0,35 = 1,47 \approx 1,5$.

2. **a.** D'après l'énoncé $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0,8$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 0,7$.

b. On construit un arbre analogue :



On a donc $x_{n+1} = x_n \times 0,8 + (1 - x_n) \times 0,7 = 0,8x_n - 0,7x_n + 0,7 = 0,7 + 0,1x_n$.

3. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $u_{n+1} = 9x_{n+1} - 7 = 9(0,7 + 0,1x_n) - 7 = 6,3 + 0,9x_n - 7 = 0,9x_n - 0,7 = 0,1(9x_n - 7) = 0,1u_n$.

$u_{n+1} = 0,1u_n$ quel que soit le naturel n non nul signifie que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,1, de premier terme $u_1 = 9x_1 - 7 = 9 \times 0,7 - 7 = -0,7$.

b. On sait que pour tout naturel n, $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,7 \times 0,1^{n-1}$.

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Par suite, comme $x_n = \dfrac{u_n + 7}{9}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{7}{9} \approx 0,777778$.

Sur un très grand nombre de services le pourcentage de services réussis se rapproche de 77,8 %.