

**La calculatrice graphique est autorisée.**

**Le sujet comporte deux parties.**

**Répondre à la partie 1 sur la copie, sans justification.**

**Le barème est fourni à titre indicatif.**

Une importance toute particulière doit être attachée à la qualité de la rédaction pour les exercices de la partie 2

**PARTIE 1: (9 points : 0,75 par question)**

**Répondre par V(vrai) ou F(faux) sans justifier.**

**EXERCICE 1**

**Calculs de limites.**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 0.$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = 1.$

c) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - x - 1}$ . La courbe  $(\Gamma)$  représentative de la fonction  $f$  admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{\sin(n) - 2n}{n+1}$  converge vers 0.

**EXERCICE 2**

**Probabilités conditionnelles.**

Un acteur est sujet à des trous de mémoire.

S'il relit son texte avant d'entrer en scène, la probabilité qu'il ait un trou de mémoire pendant la représentation vaut  $\frac{1}{9}$ , tandis que s'il ne relit pas son texte, cette probabilité vaut  $\frac{1}{3}$ .

S'il a eu un trou de mémoire au cours d'une représentation, il relit forcément son texte avant la représentation suivante ; mais s'il n'a pas eu de trou de mémoire, il ne relit son texte qu'avec une probabilité de  $\frac{1}{2}$ .

On suppose que l'acteur a relu son texte le soir de la première représentation.

a) La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire lors de la première et de la deuxième représentation est de  $\frac{1}{9}$ .

b) La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire à la deuxième représentation est de  $\frac{25}{81}$ .

c) Sachant qu'il n'a pas eu de trou de mémoire le soir de la première, la probabilité qu'il n'en ait pas eu non plus à la deuxième représentation est de  $\frac{7}{9}$ .

On note  $p_n$  ( $n$  étant un entier naturel non nul) la probabilité de l'événement « l'acteur a eu un trou de mémoire lors de la  $n^{\text{ème}}$  représentation ».

d) Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $p_{n+1} = \frac{2 - p_n}{9}$ .

### EXERCICE 3

#### Fonction exponentielle.

Soit  $F_1$  et  $g$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  respectivement par  $F_1(x) = e^{-x} - 2x$  et  $g(x) = \frac{e^{-x}(x+1)}{e^{-x} + 2}$ .

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction  $F_1$  et par  $(x_n)$  la suite définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $x_0 = 1$  et  $x_{n+1} = g(x_n)$ .

a) L'équation  $F_1(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  avec  $0 < \alpha < 1$ .

Dans les questions b), c) et d), on admet la convergence de la suite  $(x_n)$ .

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$ .

c) Si  $a \in \mathbb{R}$ , alors la tangente à (C) en  $x = a$  coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse  $g(a)$ .

On donne le programme Prog ci-contre :

d) Pour  $n = 5$ , Prog affiche 0,3125 et 0,375, nous pouvons en déduire que  $0,3125 < \alpha < 0,375$ .

```
1  VARIABLES
2  A EST_DU_TYPE NOMBRE
3  B EST_DU_TYPE NOMBRE
4  I EST_DU_TYPE NOMBRE
5  F_A EST_DU_TYPE NOMBRE
6  F_B EST_DU_TYPE NOMBRE
7  F_I EST_DU_TYPE NOMBRE
8  DEBUT_ALGORITHME
9  A PREND_LA_VALEUR 0
10 B PREND_LA_VALEUR 1
11 I PREND_LA_VALEUR (A+B)/2
12 F_A PREND_LA_VALEUR F1(A)
13 F_B PREND_LA_VALEUR F1(B)
14 F_I PREND_LA_VALEUR F1(I)
15 TANT_QUE (abs(A-B)>0.1) FAIRE
16   DEBUT_TANT_QUE
17   SI (F_A*F_I>0) ALORS
18     DEBUT_SI
19     A PREND_LA_VALEUR I
20     F_A PREND_LA_VALEUR F1(A)
21     I PREND_LA_VALEUR (A+B)/2
22     F_I PREND_LA_VALEUR F1(I)
23   FIN_SI
24   SINON
25     DEBUT_SINON
26     B PREND_LA_VALEUR I
27     F_B PREND_LA_VALEUR F1(B)
28     I PREND_LA_VALEUR (A+B)/2
29     F_I PREND_LA_VALEUR F1(I)
30   FIN_SINON
31 FIN_TANT_QUE
32 AFFICHER A
33 AFFICHER B
34 FIN_ALGORITHME
```

## PARTIE 2 : Rédigée

### EXERCICE 4 (6 points)

On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .  
Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}$  ?
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $f'$  sa fonction dérivée.  
Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$ .
4. Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variation sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit  $a$  un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$ , qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle  $T_a$  la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$ . Donner une équation de  $T_a$ .
2. Démontrer qu'une tangente à  $\mathcal{C}$  en un point d'abscisse  $a$  strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si  $a$  vérifie l'égalité

$$1 - a^2 e^{a-1} = 0.$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  de l'équation

$$1 - x^2 e^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

## EXERCICE 5 (5 points)

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services.

Pour tout entier naturel non nul, on note  $R_n$  l'évènement « le joueur réussit le  $n$ -ième service » et  $\overline{R_n}$  l'évènement contraire.

Soit  $x_n$  la probabilité de  $R_n$  et  $y_n$  celle de  $\overline{R_n}$ .

La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,7.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées

- si le joueur réussit le  $n$ -ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8;
- si le joueur ne réussit pas le  $n$ -ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,7.

1. On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de services réussis sur ces deux premiers services.

- a. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ . (On pourra utiliser un arbre de probabilité)
- b. Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  de la variable aléatoire  $X$ .

2. On s'intéresse maintenant au cas général.

- a. Donner les probabilités conditionnelles  $P_{R_n}(R_{n+1})$  et  $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$ .
- b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :  $x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7$ .

3. Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel non nul par  $u_n = 9x_n - 7$ .

*Dans ces deux questions, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

- a. Déterminer la nature de la suite  $(u_n)$ .
- b. En déduire la limite de la suite  $(x_n)$ .