T°S

CORRIGE DTL 3

Exercice 1 :

1.

- **a) FAUX :** z est un imaginaire pur(éventuellement $0i = 0$).
- **b) FAUX :** si z est un imaginaire pur$\neq 0i$.
- **c) VRAI :** $Im(z) = 0 \Leftrightarrow z = x + 0i = x \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- **d) FAUX :** en effet, $z = \bar{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy \Leftrightarrow 2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

2. Oui la c) (voir ci-dessus) et la d) en changeant « imaginaire pur » par « réel » (voir ci-dessus)

Exercice 2 :

1.

$$z = \frac{2x + 3 + 5i}{x - i}$$

En développant et sachant que $i^2 = -1$,

$$z = \frac{(2x + 3 + 5i)(x + i)}{x^2 + (-1)^2} = \frac{2x^2 + 3x - 5 + i(7x + 3)}{x^2 + 1}$$

$$z = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1} + i\frac{7x + 3}{x^2 + 1}$$

z est un imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, soit

$$\frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1} = 0$$

soit $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

Cette équation du second degré admet deux solutions 1 et $-\frac{5}{2}$, donc les valeurs de x cherchées sont 1 et $-\frac{5}{2}$.

2.

$$Z = \frac{2z - i}{z - 1 + 3i}$$

Posons $\underline{x = Re(z)}$ et $\underline{y = Im(z)}$.

Alors

$$Z = \frac{2z - i}{z - 1 + 3i} = \frac{2x + 2iy - i}{x + iy - 1 + 3i} = \frac{2x + i(2y - 1)}{(x - 1) + i(y + 3)}$$

$$Z = \frac{[(2x + i(2y - 1)][(x - 1) - i(y + 3)]}{(x - 1)^2 + (y + 3)^2}$$

$$Z = \frac{[(2x + i(2y - 1)][(x - 1) - i(y + 3)]}{(x - 1)^2 + (y + 3)^2}$$

En développant, on obtient :

$$Z = \frac{2x^2 + 2y^2 - 2x + 5y - 3}{(x - 1)^2 + (y + 3)^2} + i\frac{-7x - 2y + 1}{(x - 1)^2 + (y + 3)^2}$$

Donc

$$\boxed{Re(Z) = \frac{2x^2 + 2y^2 - 2x + 5y - 3}{(x - 1)^2 + (y + 3)^2}}$$

et

$$\boxed{Im(Z) = \frac{-7x - 2y + 1}{(x - 1)^2 + (y + 3)^2}}$$

Or $Re(\bar{Z}) = Re(Z)$ et $Im(\bar{Z}) = -Im(Z)$, d'où :

$$\boxed{\begin{gathered} Re(\bar{Z}) = \frac{2x^2+2y^2-2x+5y-3}{(x-1)^2+(y+3)^2} \\ Im(\bar{Z}) = \frac{7x+2y-1}{(x-1)^2+(y+3)^2} \end{gathered}}$$

Exercice 3 :

$u_n = 80 - 27\mathrm{e}^{-0,1n}$

1. a) Pour tout entier $n \geq 1$,
   $u_{n+1} - u_n = 80 - 27\mathrm{e}^{-0,1(n+1)} - 80 + 27\mathrm{e}^{-0,1n} = -27\mathrm{e}^{-0,1n} \times \mathrm{e}^{-0,1} + 27\mathrm{e}^{-0,1n}$
   donc
   $u_{n+1} - u_n = 27\mathrm{e}^{-0,1n}(1-\mathrm{e}^{-0,1}) = 27\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1-\frac{1}{e^{0,1}}\right)$.
   Or les deux facteurs de cette expression sont strictement positifs (une exponentielle est toujours strictement positive et $\frac{1}{e^{0,1}} < 1$), d'où $u_{n+1} - u_n > 0$, d'où la suite (u_n) est strictement croissante.

   b)
   $$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} -0,1^n = -\infty \\ \lim_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{aligned}\right\} \text{par composée :}$$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,1n} = 0$
   Par somme :
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 80}$$
   Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, après la période de mise en route, la production finit par se stabiliser à 80 unités par jour.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = \mathrm{e}^{-0,1n}$.
   a) Pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} = \mathrm{e}^{-0,1n+1} = \mathrm{e}^{-0,1n} \times \mathrm{e}^{-0,1} = v_n \times \mathrm{e}^{-0,1}$.
   Donc la suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{-0,1}$ et de premier terme $v_1 = \mathrm{e}^{-0,1}$.

   b) En utilisant la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on obtient :
   $$V = v_1 \times \frac{1-q^{12}}{1-q}$$
   D'où
   $$V = \mathrm{e}^{-0,1} \times \frac{1-\mathrm{e}^{-1,2}}{1-\mathrm{e}^{-0,1}}$$
   $$V = \frac{1}{\mathrm{e}^{0,1}} \times \frac{\mathrm{e}^{1,2}-1}{\mathrm{e}^{1,2}} \times \frac{\mathrm{e}^{0,1}}{\mathrm{e}^{0,1}-1}$$
   $$\boxed{V = \frac{\mathrm{e}^{1,2}-1}{\mathrm{e}^{1,3}-\mathrm{e}^{1,2}}}$$

   c) Il s'agit ici de calculer $U = u_1 + u_2 + \cdots + u_{12}$.
   Or $u_n = 80 - 27v_n$, d'où
   $U = 80 \times 12 - 27V$.
   $$\boxed{U \approx 781 \text{ unités}}.$$

Exercice 4.

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = e^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - e^{-x}$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement Cf et Cg sont fournies en annexes.

Partie A.
En traçant les tangentes communes au mieux, on peut remarques qu'elles semblent sécantes au point d'abscisse 0.

Partie B.
On admet l'existence de ces tangentes communes. Soit D une de ces droites.

1. a) $A\,(a\,;\, f(a))$ appartient à D signifie que le coefficient directeur de D est : $f'(a) = e^a$

b) $B(b\,;\, g(b))$ appartient à D signifie que le coefficient directeur de D est : $g'(b) = -(-e^{-b}) = e^{-b}$

c) Le coefficient directeur de D étant unique on en déduit que : $e^a = e^{-b} \Leftrightarrow a = -b$

2. Par ailleurs, le fait que B appartienne à D définie comme tangente à la courbe Cf au point A signifie que les coordonnées de B vérifient l'équation de D :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = e^a(x-a) + e^a$$

D'où, en utilisant le fait que $b = -a$:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-b} = e^a(b-a) + e^a &\Leftrightarrow 1 - e^a = e^a(-2a) + e^a \\ &\Leftrightarrow 1 - 2e^a + 2ae^a = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2(a-1)e^a = 0 \\ &\Leftrightarrow a \text{ est solution de l'équation : } 1 + 2(x-1)e^x = 0 \end{aligned}$$

Partie C.
On considère la fonction ϕ définie sur ℝ par :

$$\phi(x) = 2(x-1)e^x + 1$$

1. a) Etudions les limites de ϕ en +∞ et en −∞ :

En +∞ :

$$\left.\begin{aligned} \lim(2x-2) &= +\infty \\ \lim e^x &= +\infty \end{aligned}\right\} \text{ par produit : } \lim 2(x-1)\,e^x = +\infty$$

$\text{Donc, par somme : } \lim \phi(x) = +\infty$

En −∞ :
$\text{D'après les théorèmes de croissance comparée : } \lim 2x\,e^x = 0$
$\text{De plus, } \lim 2e^x + 1 = 1$
$\text{Donc, par somme, } \lim \phi(x) = 1$

b)
ϕ est le produit et la somme de fonctions dérivables sur ℝ donc ϕ est dérivable sur ℝ et :

$\phi'(x) = 2e^x + 2(x-1)e^x = 2xe^x$

Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc on en déduit que $\phi'(x)$ est du signe de x sur $\mathbb{R}$

c) De l'étude précédente, on peut dire que ϕ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Elle atteint donc son minimum en 0 et il vaut $\phi(0) = -1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ϕ	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) La fonction ϕ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$, ϕ est strictement décroissante et $0 \in [-1\ ;\ 1[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\phi(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-\infty\ ;\ 0]$. Appelons cette solution α.

De même sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $0 \in [-1\ ;\ +\infty[$ donc l'équation $\phi(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0\ ;\ +\infty[$. Appelons cette solution β.

b) Avec la calculatrice (par un zoom adapté, par un balayage dans le tableau de valeurs ou encore à l'aide d'un algorithme de dichotomie), on obtient : $\alpha \approx -1{,}68$ et $\beta \approx 0{,}77$

Partie D.

Soit $E(\alpha\ ;\ f(\alpha))$ et $F(-\alpha\ ;\ g(-\alpha))$ donc $E(\alpha\ ;\ e^{\alpha})$ et $F(-\alpha\ ;\ 1 + e^{\alpha})$

Déterminons le coefficient directeur de la droite (EF) :

$$m = \frac{1 - e^{\alpha} - e^{\alpha}}{-\alpha - \alpha} = \frac{1 - 2e^{\alpha}}{-2\alpha}$$

Or α est solution de l'équation $\phi(x) = 0$ de la partie C, donc :

$1 + 2(\alpha - 1)e^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2e^{\alpha} = -2\alpha e^{\alpha}$

On a donc : $m = e^{\alpha}$

On a donc montré que (EF) a le même coefficient directeur que la tangente en E à C_f (d'après la partie B) et (EF) passe par E donc (EF) est confondue avec la tangente à C_f en E.

Donc (EF) est tangente à C_f en E

De même, le coefficient directeur de la tangente à C_g en $(-\alpha)$ est $g'(-\alpha) = e^{\alpha}$. Donc (EF) est confondue avec la tangente à C_g en F.

On peut de plus remarquer que l'existence d'une seconde tangente commune peut être démontrée en appliquant ce même raisonnement à la seconde solution β de l'équation $\phi(x) = 0$.