T°S

CORRIGE DTL 3

Exercice 1 :

1.

- **a)** **FAUX :** z est un imaginaire pur(éventuellement $0i = 0$).
- **b)** **FAUX :** si z est un imaginaire pur$\neq 0i$.
- **c)** **VRAI :** $Im(z) = 0 \Leftrightarrow z = x + 0i = x \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- **d)** **FAUX :** en effet, $z = \bar{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy \Leftrightarrow 2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

2. Oui la c) (voir ci-dessus) et la d) en changeant « imaginaire pur » par « réel » (voir ci-dessus)

Exercice 2 :

1.

$$z = \frac{2x + 3 + 5i}{x - i}$$

En développant et sachant que $i^2 = -1$,

$$z = \frac{(2x + 3 + 5i)(x + i)}{x^2 + (-1)^2} = \frac{2x^2 + 3x - 5 + i(7x + 3)}{x^2 + 1}$$

$$z = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1} + i\frac{7x + 3}{x^2 + 1}$$

z est un imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, soit

$$\frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1} = 0$$

soit $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

Cette équation du second degré admet deux solutions 1 et $-\frac{5}{2}$, donc les valeurs de x cherchées sont 1 et $-\frac{5}{2}$.

2.

$$Z = \frac{2z - i}{z - 1 + 3i}$$

Posons $\underline{x = Re(z)}$et $\underline{y = Im(z)}$.

Alors

$$Z = \frac{2z - i}{z - 1 + 3i} = \frac{2x + 2iy - i}{x + iy - 1 + 3i} = \frac{2x + i(2y - 1)}{(x - 1) + i(y + 3)}$$

$$Z = \frac{[(2x + i(2y - 1)][(x - 1) - i(y + 3)]}{(x - 1)^2 + (y + 3)^2}$$

$$Z = \frac{[(2x + i(2y - 1)][(x - 1) - i(y + 3)]}{(x - 1)^2 + (y + 3)^2}$$

En développant, on obtient :

$$Z = \frac{2x^2 + 2y^2 - 2x + 5y - 3}{(x - 1)^2 + (y + 3)^2} + i\frac{-7x - 2y + 1}{(x - 1)^2 + (y + 3)^2}$$

Donc

$$\boxed{Re(Z) = \frac{2x^2 + 2y^2 - 2x + 5y - 3}{(x - 1)^2 + (y + 3)^2}}$$

et

$$\boxed{Im(Z) = \frac{-7x - 2y + 1}{(x - 1)^2 + (y + 3)^2}}$$