

T°S7-T°S8
Mme BOUIS-SFEZ -M. LICHTENBERG
DTL DE MATHÉMATIQUES N°3
28/01/2014
Durée : 2h
Calculatrices autorisées

Exercice 1 : (3 points)

- Répondre par **vrai** ou **faux** en justifiant :
 - Si $Re(z) = 0$, alors $z = 0$.
 - Si $z \neq 0$, alors $Re(z) \neq 0$.
 - Si $Im(z) = 0$, alors $z \in \mathbb{R}$.
 - Si $z = \bar{z}$, alors z est un imaginaire pur.
- Parmi ces affirmations, certaines peuvent-elles être mises sous forme d'équivalences ? Justifier.

Exercice 2 : (2 points)

- x est un réel. Déterminer les valeurs de x telles que le nombre complexe

$$z = \frac{2x + 3 + 5i}{x - i}$$

soit un imaginaire pur.

- z et Z sont des nombres complexes.

$$Z = \frac{2z - i}{z - 1 + 3i}$$

Calculer $Re(\bar{Z})$ et $Im(\bar{Z})$ en fonction de $Re(z)$ et de $Im(z)$.

Exercice 3 : (5 points)

Dans une entreprise, on installe un nouvel atelier.

Pendant la période de mise en route, la quantité produite le n -ième jour ($n \geq 1$) est donnée par la formule :

$$u_n = 80 - 27e^{-0,1n}.$$

- Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
 - Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

Interpréter ce résultat.

- On pose pour tout $n \geq 1$, $v_n = e^{-0,1n}$.
 - Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $e^{-0,1}$.
 - Calculer $V = v_1 + v_2 + \dots + v_{12}$.
 - A la suite d'une avarie, l'atelier doit être arrêté après 12 jours de fonctionnement. Quelle est la production totale à une unité près, obtenue pendant cette période ?

Exercice 4 : (10 points)

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - e^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note \mathcal{D} l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse a et tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point B d'abscisse b .

- Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A.
 - Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point B.
 - En déduire que $b = -a$.
- Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x-1)e^x + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par

$$\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1.$$

- Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
 - Calculer la dérivée de la fonction φ , puis étudier son signe.
 - Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur \mathbb{R} . Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
- Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans \mathbb{R} .
 - On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

On note E le point de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse α et F le point de la courbe \mathcal{C}_g d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

- Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point E.
- Démontrer que (EF) est tangente à \mathcal{C}_g au point F.

NOM :

T°S

Prénom :

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

