Lycée Fénelon Sainte-Marie Année 2015-2016 Lundi 14 mars 2016	Durée : 3heures	Terminales S5 Mathématiques DTL N°4

La calculatrice graphique est autorisée.

Le sujet comporte un total de 6 exercices
pouvant être traités dans l'ordre de votre choix.
Le barème, sur un total de 20 points, est fourni à titre indicatif.

Une importance toute particulière doit être attachée à la qualité de la rédaction.

Exercice 1 (3 *points*)

Soit $z = x + iy$ un complexe.

Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des complexes suivants en fonction de la partie réelle et de la partie imaginaire de z.

$$z_1 = (1+i)z \qquad z_2 = (z+i)^2$$

$$z_3 = (z+i)(\overline{z}-i) \qquad z_4 = \frac{1}{z+i}$$

Exercice 2 (3 *points*)

Soit la fonction polynomiale P définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 6z + 13$$

1. Calculer $P(i)$ et $P(-i)$.
2. Pour tout complexe z, on a l'égalité : $P(z) = (z^2+1)Q(z)$ où $Q(z) = z^2 + cz + d$.
   Déterminer les valeurs des réels c et d.
3. Résoudre l'équation $Q(z) = 0$.
   Résoudre alors l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 3 (3 *points*)

1. Donner le signe de $3x^2 - 5x + 1$.
2. Sans la calculer, expliquer pourquoi l'intégrale $I = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2} dx$ est négative.
3. Calculer I.

Exercice 4 (2 *points*)

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto \left(2x^2-3x+5\right)e^{-2x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \left(-4x^2+10x-13\right)e^{-2x}$.

2. Calculer $\int_0^2 \left(-4x^2+10x-13\right)e^{-2x}dx$.

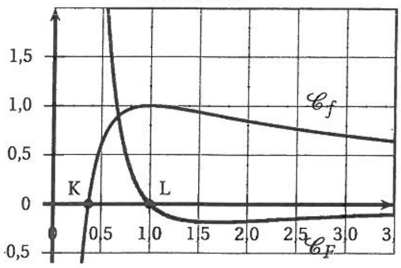
Exercice 5 (3 *points*)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

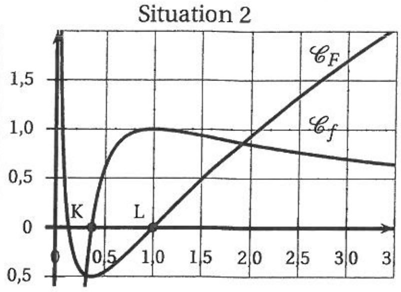
$$f(x)=\frac{1}{x}(1+\ln x)$$

1. Dans les trois situations suivantes, on a dessiné, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et une courbe $\mathscr{C}_F$. Dans une seule situation, la courbe $\mathscr{C}_F$ est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f. Laquelle ? Justifier la réponse.

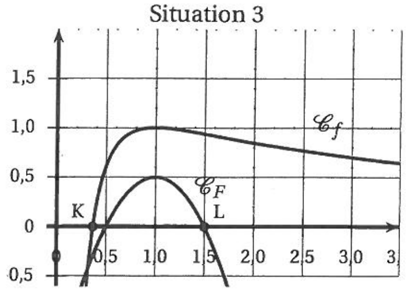
Situation 1



Situation 2



Situation 3



2. Dans la situation retenue à la question 1, on appelle :

— K le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses et $\mathscr{D}$ la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées ;

— L le point d'intersection de $\mathscr{C}_F$ et de l'axe des abscisses, ayant une abscisse supérieure à $\frac{1}{2}$ et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

a. Déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine du plan délimité par les droites $\mathscr{D}$ et Δ, par la courbe $\mathscr{C}_f$ et par l'axe des abscisses.

b. Peut-on déterminer la valeur exacte de cette aire ?

Exercice 6 (6 *points*)

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que :

$$f(x)=\frac{x}{e^x-x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe, **à rendre avec la copie**.

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n=\int_0^n f(x)\,dx$.
On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $e^x-x\geqslant\frac{e^x}{2}$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n\leqslant\int_0^n 2xe^{-x}\,dx$.
   b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que :
   $$H(x)=(-x-1)e^{-x}$$
   Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n\leqslant 2$.
3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont
— K et i des entiers naturels, K étant non nul ;
— A, x et h des réels.

Entrée :	Saisir K entier naturel non nul
Initialisation	Affecter à A la valeur 0 Affecter à x la valeur 0 Affecter à h la valeur $\frac{1}{K}$

Traitement	Pour i variant de 1 à K
	    Affecter à A la valeur $A+h\times f(x)$
	    Affecter à x la valeur $x+h$
	Fin Pour

Sortie	Afficher A

1. Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $K=4$. Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

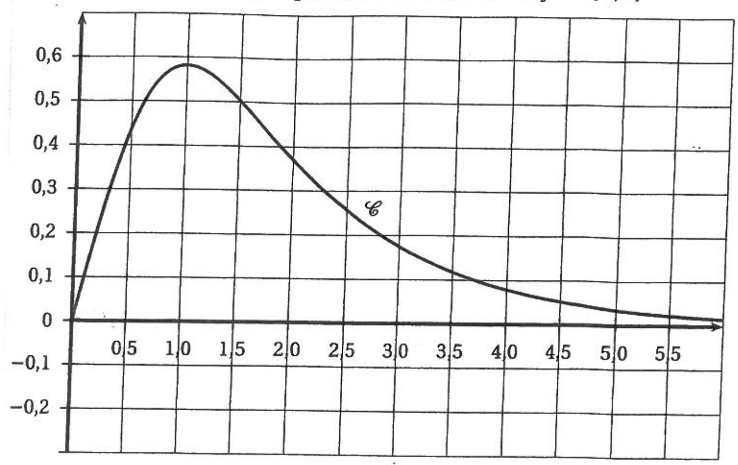
i	A	x
1		
2		
3		
4		

2. En l'illustrant sur l'annexe **à rendre avec la copie**, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour $K=8$.
3. Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?

Annexe exercice 6
(A rendre avec la copie)

NOM et PRENOM :

Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur [0 ; 6]



Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur [0 ; 1]