

T°S7-8
CORRIGE DU DTL 4
18/03/2014

Exercice 1 :

1. $f(M) = M \iff z = z^2 \iff z^2 - z = 0 \iff z(z-1) = 0 \iff z = 0$ ou $z = 1$. On en déduit que $\Gamma_1 = \{O, \Omega\}$.

2. a. $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b. Soit M tel que $f(M) = A \iff z^2 = a \iff z^2 - 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 0 \iff z^2 - \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = 0 \iff (z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}})(z + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}) = 0 \iff z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}} = 0$ ou $z + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}} = 0 \iff z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ ou $z = -\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$.

Les affixes des deux antécédents de A par f sont $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$.

3. On pose $z = x + iy$ l'écriture algébrique de z . On a $z' = x^2 - y^2 + 2ixy$ est imaginaire pur si et seulement si $x^2 - y^2 = 0 \iff (x-y)(x+y) = 0 \iff x-y = 0$ ou $x+y = 0 \iff x = y$ ou $x = -y$.

Γ_2 est donc la réunion des droites d'équations $x = y$ et $x = -y$.

4. Soit M le point d'affixe z et M' son image, d'affixe $z' = z^2$

a. $M \in \Gamma_3 \iff z' - 1 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1) \iff z^2 - 1 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1) \iff z^2 - iz - 1 + i = 0$, avec $z \neq 1$ car $M \neq \Omega$.

b. En développant $(z - 1)(z + 1 - i)$, on trouve bien $z^2 - iz - 1 + i$.

c. $z^2 - iz - 1 + i = 0 \iff (z - 1)(z + 1 - i) = 0 \iff z - 1 = 0$ ou $z + 1 - i = 0 \iff z = 1$ ou $z = -1 + i$. Or $z \neq 1$, donc Γ_3 contient uniquement le point d'affixe $-1 + i$.

5. a. $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z') - \arg(z) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg\left(\frac{z^2}{z}\right) = \arg(z)$

b. Les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv 0[\pi] \iff \arg(z) \equiv 0[\pi] \iff z \in \mathbb{R}$. Γ_4 est donc l'axe des abscisses privé des points O et Ω .

Exercice 2 :

1. a) F b) V c) V d) V e) V

2. a) V b) F c) V d) V e) F

3. a) V b) V c) F d) F e) V

Exercice 3 :

a, b, b.

Exercice 3 :

Partie A - Étude du signe d'une fonction

1. f somme de fonctions dérivable sur $]0; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 2x + \frac{4}{x}.$$

Comme $x > 0 \Rightarrow 2x > 0$ et $\frac{4}{x} > 0$, on déduit que $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \ln x = -\infty$; par somme de limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

L'axe des ordonnées est donc asymptote verticale à la courbe représentative de f au voisinage de zéro.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \ln(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

2. La fonction f est continue et strictement croissante de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} . $0 \in \mathbb{R}$, donc, d'après le corollaire du TVI appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule α dans $]0; +\infty[$.

3. De la question précédente résulte le signe de $f(x)$:

- si $0 < x < \alpha$: $f(x) < 0$;
- si $x = \alpha$: $f(x) = 0$;
- si $\alpha < x$: $f(x) > 0$.

Partie B - Une valeur approchée du réel α défini dans la partie A

1. $g(x) = x \iff e^{-\frac{1}{4}x^2} = x \iff -\frac{1}{4}x^2 = \ln x$ (par croissance de la fonction logarithme népérien, les deux membres étant supérieurs à zéro) $\iff \frac{1}{4}x^2 + \ln x = 0 \iff x^2 + 4 \ln x = 0 \iff f(x) = 0$.

On a vu que l'unique solution de cette équation est le réel positif α . Donc α est aussi l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

2. Voir plus bas. On peut conjecturer que la suite converge vers la solution de l'équation $g(x) = x$ dans \mathbb{R}_+^* c'est-à-dire α .

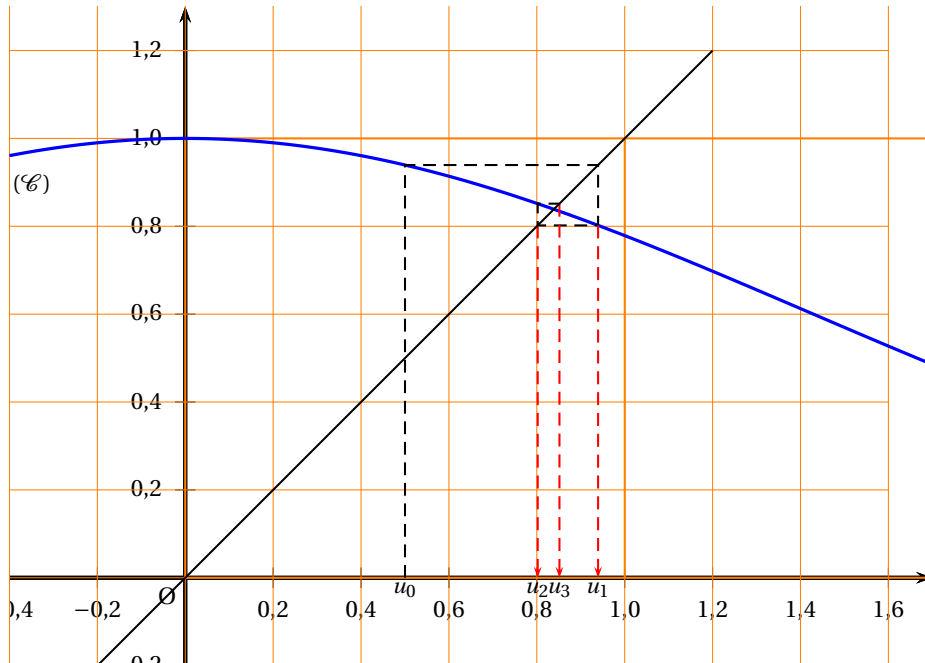
3. Avec la calculatrice, on obtient :

$u_0 = 0,5, u_1 \approx 0,939413, u_2 \approx 0,802018, u_3 \approx 0,851455, u_4 \approx 0,834232, u_5 \approx 0,840309, u_6 \approx 0,838174, u_7 \approx 0,838925.$

Le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimales de u_n et u_{n+1} sont identiques est donc $n = 6$.

Puisqu'on a supposé que $u_6 \leq \alpha \leq u_7$, on a donc $0,838174 \leq \alpha \leq 0,838925$.

Donc 0,838 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.



Partie C - Un problème de distance

1. Avec $M(x; 2 \ln x)$, on a $OM^2 = x^2 + (2 \ln x)^2 = x^2 + 4(\ln x)^2$.

Comme $x^2 > 0$ et $4(\ln x)^2 > 0$, on a $OM^2 > 0$.

Donc $OM = \sqrt{x^2 + 4(\ln x)^2}$.

2. a. h somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$h'(x) = 2x + 8(\ln x) \times \frac{1}{x} = 2x + 8 \frac{\ln x}{x} = \frac{2x^2 + 8 \ln x}{x} = \frac{2(x^2 + 4 \ln x)}{x} = \frac{2f(x)}{x}.$$

Comme $x > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui de $2f(x)$, donc celui de $f(x)$ qui a été étudié dans la partie A. Conclusion :

- Si $x < \alpha$: $h'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur $[0; \alpha[$.
- si $x > \alpha$: $h'(x) > 0$: la fonction h est croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

b. Le résultat précédent montre que la fonction h a un minimum $h(\alpha)$. La fonction définie par $x \mapsto OM = \sqrt{h(x)}$ a les mêmes variations que la fonction h , donc un minimum en α .

Conclusion : il existe un point unique de (Γ) $A(\alpha; 2 \ln \alpha)$ tel que $OA < OM$ pour tout point M de (Γ) distinct de A .

3. La tangente T_A à la courbe (Γ) au point A a pour vecteur directeur $(1; \varphi'(\alpha)) = \left(1; \frac{2}{\alpha}\right)$.

La droite OA a pour vecteur directeur $\overrightarrow{OA}(\alpha; 2 \ln \alpha)$.

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est égal à : $1 \times \alpha + \frac{2}{\alpha} \times 2 \ln \alpha = \alpha + \frac{4 \ln \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + 4 \ln \alpha}{\alpha}$.

On a vu dans la question précédente que $f(\alpha) = \alpha^2 + 4 \ln \alpha = 0$ donc le produit scalaire est nul, ce qui montre que la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente T_A .

3. La droite (OA) a pour coefficient directeur

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{2\ln\alpha}{\alpha}$$

La tangente en A à \mathcal{L} a pour coefficient directeur

$$\varphi'(\alpha) = \frac{2}{\alpha}$$

Le produit de ces deux coefficients directeurs est égal à :

$$\frac{2\ln\alpha}{\alpha} \times \frac{2}{\alpha} = \frac{4\ln\alpha}{\alpha^2}$$

Or $g(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 4\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow 4\ln\alpha = -\alpha^2$, d'où

$$\frac{2\ln\alpha}{\alpha} \times \frac{2}{\alpha} = \frac{4\ln\alpha}{\alpha^2} = -1.$$

Donc la droite (OA) et T_A sont perpendiculaires.