

**La calculatrice graphique est autorisée.**  
**Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.**  
**Le barème est fourni à titre indicatif.**

Une importance toute particulière doit être portée à la qualité de la rédaction,  
celle-ci comptant pour une part significative dans la notation.

**ATTENTION !**  
**Pensez à rendre l'annexe complétée avec votre copie !**

**Exercice 1** (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère l'application  $f$  du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = z^2$$

On note  $\Omega$  le point d'affixe 1.

- Déterminer l'ensemble  $\Gamma_1$  des points  $M$  du plan tels que  $f(M) = M$ .
- Soit  $A$  le point d'affixe  $a = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ .
  - Exprimer  $a$  sous forme exponentielle.
  - En déduire les affixes des deux antécédents de  $A$  par  $f$ .
- Déterminer l'ensemble  $\Gamma_2$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que l'affixe  $z'$  du point  $M'$  soit un imaginaire pur.
- Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble  $\Gamma_3$  des points  $M$  distincts de  $\Omega$  pour lesquels le triangle  $\Omega MM'$  est rectangle isocèle direct en  $\Omega$ .
  - En utilisant l'application du plan dans lui-même qui, au point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M''$  d'affixe  $z''$  telle que  $z'' - 1 = e^{\frac{i\pi}{2}}(z - 1)$ , montrer que  $M$  est un point de  $\Gamma_3$  si, et seulement si,  $z^2 - iz - 1 + i = 0$  et  $z \neq 1$ .
  - Montrer que  $z^2 - iz - 1 + i = (z - 1)(z + 1 - i)$ .
  - En déduire l'ensemble  $\Gamma_3$ .

5. Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  différente de 0 et de 1.
- Exprimer  $(\overline{OM}, \overline{OM'})$  en fonction d'un argument de  $z$ .
  - En déduire l'ensemble  $\Gamma_4$  des points  $M$  distincts de  $O$  et de  $\Omega$  tels que  $O, M$  et  $M'$  soient alignés.

**Exercice 2 – VRAI-FAUX (7,5 points)**

Pour chacune des situations ci-après, cinq affirmations vous sont proposées.  
Pour chaque affirmation, vous devez préciser si elle est vraie ou fausse.  
Aucune justification n'est demandée.

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ .

Alors :

- Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$ .
  - $f'(4) = 0$ .
  - Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f(x) > 0$ .
  - L'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution dans  $]0; +\infty[$ .
  - La courbe représentative de  $f$  admet une asymptote verticale.
2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1; +\infty[$  par  $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ .

Alors :

- La courbe représentative de  $f$  admet une asymptote horizontale.
- Pour tout  $x \in ] -1; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ .
- $f$  est décroissante sur  $] -1; +\infty[$ .
- $f(1) - 1 < 0$ .
- Il existe  $x \in ]0; 1[$  tel que  $f(x) - x = 0$ .

3. Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x e^{-2x} + 3$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Alors :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ .
- $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- La tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x = 1$  a pour équation  $y = 3 - e^{-2x}$ .
- $f'(0)f'(2) < 0$ .

**Exercice 3 - QCM** (1,5 point)

Pour chaque question ci-dessous, une seule des réponses proposées est correcte.

Indiquez sur votre copie la réponse que vous estimez être la bonne.

Une bonne réponse rapporte 0,5 point, une réponse erronée enlève 0,25 point et l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.

1.  $\frac{1}{2} \ln(27) - 2 \ln(3) + \ln(\sqrt{3})$  est :
  - a. Nul.
  - b. Strictement négatif.
  - c. Strictement positif.
  - d. Aucune des trois propositions précédentes n'est correcte.
  
2.  $\frac{-2e^2 \times 3e^4}{(2e^2)^2 - 3e^4}$  est égal à :
  - a.  $\frac{1}{2e^2}$ .
  - b.  $-6e^2$ .
  - c.  $-5e^2$ .
  - d. Aucune des trois propositions précédentes n'est correcte.
  
3.  $(\ln(3))^2 - 2 \ln(3)$  est :
  - a. Nul.
  - b. Strictement négatif.
  - c. Strictement positif.
  - d. Aucune des trois propositions précédentes n'est correcte.

**Exercice 4** (6 points)

**Partie A** Etude du signe d'une fonction.

On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x^2 + 4 \ln x$$

1. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction  $f$  en précisant les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  et une seule dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
3. En déduire le signe de  $f(x)$  selon les valeurs du réel strictement positif  $x$ .

**Partie B** Une valeur approchée du réel  $\alpha$  défini dans la partie A.

Sur le graphique fourni en annexe, on a tracé une partie de la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}$$

On définit la suite  $(u_n)$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = g(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Vérifier que  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $g(x) = x$ .
2. Au moyen de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite d'équation  $y = x$ , représenter les termes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  de la suite  $(u_n)$  sur l'axe des abscisses.

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite  $(u_n)$  ?

3. On admet que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$ .  
En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier  $n$  pour lequel les trois premières décimales de  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont identiques.  
En déduire que 0,838 est une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.

**Partie C** Un problème de distance.

On appelle  $\mathcal{L}$  la courbe représentative, dans un repère orthonormal, de la fonction  $\varphi$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $\varphi(x) = 2 \ln x$ .

L'objectif de cette partie est de démontrer que parmi les points de la courbe  $\mathcal{L}$ , il y en a un et un seul qui est plus proche de l'origine que tous les autres.

1. Soient  $M$  un point de la courbe  $\mathcal{L}$  et  $x$  son abscisse.  
Exprimer  $OM$  en fonction de  $x$ .
2. Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$h(x) = x^2 + 4(\ln x)^2$$

- a. Etudier les variations de la fonction  $h$ . On pourra utiliser la **partie A**.
  - b. En déduire qu'il existe un unique point  $A$  de la courbe  $\mathcal{L}$  tel que pour tout point  $M$  de  $\mathcal{L}$ , distinct de  $A$ , on ait :  $OM > OA$ .
3. Démontrer que la droite  $(OA)$  est perpendiculaire à la tangente  $T_A$  à la courbe  $\mathcal{L}$  au point  $A$ .

**NOM et PRENOM :**

Annexe

