CORRIGE DU DTL DU 27/5/2014
T°S

EXERCICE 1

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrons que les points A, B et C ne sont pas alignés.
On a $\overrightarrow{AB}\,(1;-1;-1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(2;-5;-3)$. On a : $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-5}$.
Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.

a. Démontrons que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = 1\times 2+(-1)\times(-1)+(-1)\times 3 = 0$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u} = 2\times 2+(-5)\times(-1)+(-3)\times 3 = 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{u}$.
La droite Δ est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : elle est orthogonale au plan (ABC)

b. De ce qui précède, on déduit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à (ABC).
Une équation cartésienne de (ABC) est de la forme $2x - y + 3z + d = 0$.
Comme le point A appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient :
$2\times 0+(4)\times(-1)+(1)\times 3+d = 0 \Leftrightarrow d = 1$.
On en déduit une équation cartésienne du plan (ABC) : $2x - y + 3z + 1 = 0$.

c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ.
Comme la droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$ et contient le point D (7 ; −1 ; 4), une représentation paramétrique de Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

d. Déterminons les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Les coordonnées de H sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\\ 2x-y+3z+1 &=& 0\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\\ 2x-y+3z+1 &=& 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\\ 2(2t+7)-(-t-1)+3(3t+4)z+1 &=& 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\\ t &=& -2\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3\\ y &=& 1\\ z &=& -2\\ t &=& -2\end{array}\right.$$

Le point H a pour coordonnées $H(3;\ 1;\ -2)$

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

a. Démontrons que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
Le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $x + y + z = 0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}\,(1\,;\,1\,;\,1)$.
Le plan $\mathscr{P}_\in$ d'équation $x + 4y + 2 = 0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\,(1\,;\,4\,;\,0)$.
Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Les plans ne sont pas parallèles ; ils sont sécants.

b. Vérifions que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Considérons le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ x+4y+2 &=& 0\\ y &=& y\end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ x+4y+2 &=& 0\\ y &=& t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z &=& -x-y\\ x &=& -4t-20\\ y &=& t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z &=& 3t+2\\ x &=& -4t-20\\ y &=& t\end{array}\right.$$

On en déduit que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -4t-2\\ y &=& t\\ z &=& 3t+2\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

c. On déduit de la représentation paramétrique précédente que la droite d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\,(-4\,;\,1\,;\,3)$.

Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = 0$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux : la droite d et le plan (ABC) sont parallèles .

EXERCICE 2

1. (a)
   - Les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $\big(0; f(0)\big)$ soit $(0\,;\,2)$.
   - Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
     On applique la règle du produit nul en sachant que $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$:
     $f(x) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
     Le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(-2\,;\,0)$.

   (b) **Remarque :** la fonction $(x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$ peut être considérée comme une fonction composée $x \mapsto -x$ suivie de l'exponentielle
   ou bien comme un quotient $\left(\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

La même stratégie menée en $+\infty$ conduit à la forme indéterminée « $+\infty \times 0$ » car $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Mais, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \text{ théorème de croissance comparée } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} = 0\end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

L'axe des abscisses est donc asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

(c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\mathrm{e}^{-x} = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $-(x+1)$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

2. (a) $1,642$

(b)

Variables :	k est un nombre entier
	N est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à N-1
	Affecter à S la valeur $S + \dfrac{1}{N} f\left(\dfrac{k}{N}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

3. (a) Sur $[0\ ;\ 1]$, f est continue et positive, donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire, est donnée par $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a donc :
$\mathscr{A} = \left[g(t)\right]_0^1 = g(1) - g(0) = -4\mathrm{e}^{-1} + 3 = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

(b) avec la calculatrice, $3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} - 1,642 \approx 0,113$

EXERCICE 3

Rappel :

$$F(t) = p(X \leqslant t) = p([0\ ;\ t]) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Restitution organisée de connaissances

Pré-requis :

a. $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (où A et B sont deux évènements tels que $p(B) \neq 0$) ;

b. $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$ (où A est un évènement) ;

c. $p([a\ ;\ b]) = F(b) - F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a \leqslant b$).

• Montrons que $p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s]) = \dfrac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)}$

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s]) = \frac{p([t\ ;\ +\infty[\cap[t\ ;\ t+s])}{p([t\ ;\ +\infty[)}$$

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s]) = \frac{p([t\ ;\ t+s])}{p([t\ ;\ +\infty[)}$$

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s]) = \frac{p([0\ ;\ t+s]) - p([0\ ;\ t[)}{1 - p([0;\, t[)}$$

or $p([a\ ;\ b]) = F(b) - F(a) = p([0;b]) - p([0;a]) = p(]a;b])$ donc que l'intervalle soit fermé ou ouvert, la probabilité ne change pas.

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s]) = \frac{p([0\ ;\ t+s]) - p([0\ ;\ t])}{1 - p([0;t])}$$

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s]) = \frac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)}$$

• Enfin montrons que :$p_{[t\ ;\ +\infty]}([t\ ;\ t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

$$F(t) = [\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^t$$

$$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

donc

$$p_{[t\ ;\ +\infty[)}([t\ ;\ t+s]) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda(t+s)} - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

donc

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s]) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s]) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda s}$$

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s]) = p([0\ ;\ s])$$

$p_{[t\ ;\ +\infty]}([t\ ;\ t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. La probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $p(]2\ ;\ +\infty[) = 1 - p([0\ ;\ 2]) = 1 - F(2)$
$p(]2\ ;\ +\infty[) = \mathrm{e}^{-0,2\times 2} = \mathrm{e}^{-0,4}$.

3. « Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans »
on cherche

$$p_{[2\ ;\ +\infty[}([6;+\infty[) = 1 - p_{[2\ ;\ +\infty[}([0;6])$$

$$p_{[2\ ;\ +\infty[}([6;+\infty[) = 1 - p_{[2\ ;\ +\infty[}([0;6])$$

$$p_{[2\ ;\ +\infty[}([6;+\infty[) = 1 - p_{[2\ ;\ +\infty[}([2;6])$$

$$p_{[2\ ;\ +\infty[}([6;+\infty[) = 1 - p_{[2\ ;\ +\infty[}([2;2+4]) = 1 - p([0;4]) = \mathrm{e}^{-0,2\times 4} = \mathrm{e}^{-0,8}$$

(on a utilisé la R.O.C. avec $t = 2$ et $s = 4$)

4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.
Dans cette question, les probabilités seront **arrondies à la sixième décimale**.

a. La probabilité que pour un capteur, il ne tombe pas en panne au cours des deux premières années c'est $p = \mathrm{e}^{-0,4}$ (ceci est la probabilité qu'un capteur fonctionne encore après deux ans), or les 10 capteurs fonctionnent de manière indépendante, donc le nombre de capteurs encore en marche au bout de deux ans suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(10\ ;\ \mathrm{e}^{-0,4}\right)$, la probabilité qu'il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au bout de 2 ans est
$\binom{10}{2} \times (\mathrm{e}^{-0,4})^2 \times (1 - \mathrm{e}^{-0,4})^8 \simeq 0,000\,035$.

b. La probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années, donc il y ait au moins un capteur en marche au bout de 2 ans, notons là $p(B)$.
$\overline{B}$ « tous les capteurs tombent en panne au cours des deux premières années », de probabilité $(1 - \mathrm{e}^{-0,4})^{10}$
donc la probabilité demandée est $(1 - (1 - \mathrm{e}^{-0,4})^{10}) \simeq 0,999\,985$.