

T°S7-8
DTL DE MATHÉMATIQUES
27/05/2014
Durée 3 heures
Calculatrices autorisées

La qualité de la rédaction : justifications, rigueur, précision, construction visible des raisonnements, prendra une part importante dans la notation.

Exercice 1 : (6 points)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; -1 ; -2) et D (7 ; -1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$.
 - a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
 - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
 - d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit \mathcal{P}_1 le plan d'équation $x + y + z = 0$ et \mathcal{P}_2 le plan d'équation $x + 4y + 2z = 0$.
 - a. Démontrer que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.
 - b. Vérifier que la droite d , intersection des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
 - c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 2 : (8 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x+2)e^{-x}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f .

- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C} avec les axes du repère.
- Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe \mathcal{C} .
- Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .

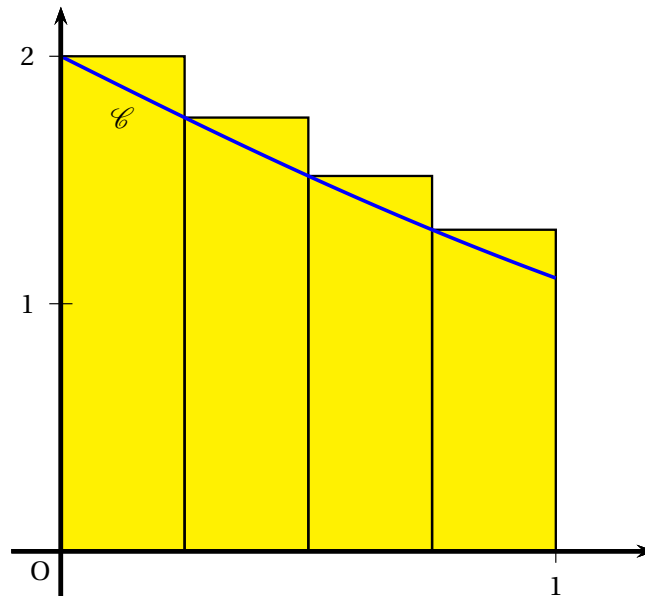
2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

On note \mathcal{D} le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine \mathcal{D} en calculant une somme d'aires de rectangles.

- Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0 ; 1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4} ; 1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine \mathcal{D} en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables :	k est un nombre entier S est un nombre réel		
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0		
Traitement :	Pour k variant de 0 à 3 <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="padding: 0 5px;"> </td> <td>Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$</td> </tr> </table>		Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$
	Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$		
	Fin Pour		
Sortie :	Afficher S		

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

- b.** Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0 ; 1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.

Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

- 3.** Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = (-x - 3)e^{-x}.$$

- a.** Montrer que g est une primitive de f sur \mathbb{R} .
b. Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} , exprimée en unités d'aire.
c. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant \mathcal{A} par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2.a, c'est à dire l'écart entre ces deux valeurs.

Exercice 3 : (6 points)

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ strictement positif), c'est-à-dire que la probabilité que ce capteur tombe en panne avant l'année t (t positif) s'exprime par :

$$F(t) = p(X \leq t) = p([0; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. Restitution organisée de connaissances

Pré-requis :

- a. $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (où A et B sont deux évènements tels que $p(B) \neq 0$);
- b. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ (où A est un évènement);
- c. $p([a; b]) = F(b) - F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a \leq b$).

Démontrer que, pour tout nombre réel positif s , on a :

$$p_{[t; +\infty]}([t; t+s]) = \frac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)},$$

et que $p_{[t; +\infty]}([t; t+s])$ est indépendant du nombre réel t .

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. Démontrer que la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $e^{-0,4}$.
3. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans?
4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.
Dans cette question, les probabilités seront **arrondies à la sixième décimale**.
 - a. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.
 - b. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.