Vrai ou faux – Page 129

Exercice N°12

→ VRAI
Cf. le cours.

Exercice N°13

→ VRAI
Cette équation équivaut à $x = e^m$.

Exercice N°14

→ FAUX
On a en fait : $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ (la fonction logarithme népérien s'annule en 1 et est strictement croissante sur $]0;+\infty[$).

Exercice N°15

→ VRAI
La fonction logarithme népérien s'annule en 1 et est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Exercice N°16

→ FAUX
On a, pour tout réel *a* strictement positif :

$$\ln a^2 = 2\ln a$$

Plus généralement :

Pour tout réel *a* non nul, on se ramène à la situation précédente : $\ln a^2 = \ln |a|^2 = 2\ln|a|$.

Exercice N°17

→ VRAI
On a :

$$\ln x + \ln(x+1) = \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \\ \ln[x(x+1)] = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x+1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 1 \text{ ou } x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Exercice N°18

→ **VRAI**

Pour tout réel x de $]0;+\infty[$, on a $\sqrt{x}>0$ et, de fait : $\left(\sqrt{x}\right)^3>0$.

On a : $\ln\left(\sqrt{x}\right)^3=3\ln\sqrt{x}=3\times\frac{1}{2}\ln x=\frac{3}{2}\ln x$.

Exercice N°19

→ **FAUX**

Comme $\ln 0,5<0$, on a :

$$n\ln 0,5\leq -\ln 19 \Leftrightarrow n\geq\frac{-\ln 19}{\ln 0,5}\Leftrightarrow n\geq\frac{-\ln 19}{\ln\frac{1}{2}}\Leftrightarrow n\geq\frac{-\ln 19}{-\ln 2}\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln 19}{\ln 2}$$

Comme : $\frac{\ln 19}{\ln 2}\simeq 4,25$, on en déduit finalement que l'ensemble des entiers naturels n tels que $n\ln 0,5\leq -\ln 19$ est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 5.

Exercice N°20

→ **VRAI**

La fonction $x\mapsto(\ln x)^3$ est la composée de la fonction logarithme népérien et de la fonction cube. Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^3=\lim\limits_{X\to+\infty}X^3=+\infty$.

Exercice N°21

→ **VRAI**

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ d'où, par produit, le résultat.

Exercice N°22

→ **VRAI**

Il suffit de dériver ! $f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$.

Exercice N°23

→ **VRAI**

Cette limite est le nombre dérivé de la fonction logarithme népérien en e :

$\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}$. Comme la dérivée de cette fonction sur $]0;+\infty[$ est la fonction inverse, on a bien : $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\frac{1}{e}$.

$\boxed{\text{Exercice N°24}}$

→ VRAI
On a : $\log 12\ 836 = \log\left(1,283\ 6 \times 10^4\right) = \log 1,283\ 6 + \log 10^4 = \log 1,283\ 6 + 4$

$\boxed{\text{Exercice N°25}}$

→ VRAI
On a, par définition, pour tout réel x strictement positif : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.
Comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$ et $\ln 10 > 0$, on en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ est également strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$.

$\boxed{\text{Exercice N°26}}$

→ FAUX
On a : $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ existe si, et seulement si : $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$.
Or : $\dfrac{x-1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$.