Vrai ou faux – Page 155

Exercice N°10

→ FAUX
Cf. le cours. On a en fait : $3^{x+y} = 3^x \times 3^y$.

Exercice N°11

→ FAUX
Attention à la définition ! On se mélange vite les pinceaux si l'on n'y prend pas garde …
On a : $a^b = e^{b \ln a}$.

Exercice N°12

→ VRAI
On a : $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 2 \Leftrightarrow x \ln \frac{1}{3} > \ln 2 \Leftrightarrow -x \ln 3 > \ln 2 \Leftrightarrow x < -\frac{\ln 2}{\ln 3} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty ; -\frac{\ln 2}{\ln 3}\right[$.

Exercice N°13

→ FAUX
Dans le cas où a appartient à l'intervalle : $]0;+1[$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$. Ici : $a = 0,9$.

Exercice N°14

→ VRAI
Dans le cas où a appartient à l'intervalle : $]+1;+\infty[$, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$. Ici : $a = 1,1$.

Exercice N°15

→ FAUX
C'est vrai pour tout a dans l'intervalle $]0;+1[$ (au voisinage de $+\infty$) et pour tout a dans l'intervalle $]+1;+\infty[$ (au voisinage de $-\infty$) MAIS ce n'est pas vrai pour $a = 1$!

Exercice N°16

→ FAUX
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^2} \right)$. Chaque facteur tend vers 0 (le premier par croissance comparées) donc cette limite est nulle.

Exercice N°17

→ VRAI

On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{3}{x^2}} \right)$.

Par croissances comparées, on a immédiatement : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Par ailleurs : $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0$, d'où : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{x^2}} = 1$.

Par produit on conclut : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+3} = +\infty$.

Exercice N°18

→ FAUX

On a : $\sqrt[4]{x^4} = x$ pour tout réel *x* positif mais cette égalité n'est pas valable pour n'importe quel réel strictement négatif. Par exemple, pour $x = -2$, on a : $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2 \neq -2$.

Plus généralement : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt[4]{x^4} = |x|$.

Exercice N°19

→ FAUX

On a : $\sqrt{\sqrt[5]{a}} = \sqrt{a^{\frac{1}{5}}} = \left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{10}} \neq \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{6}}$.

Exercice N°20

→ VRAI

On a : $\sqrt[4]{4} \times \sqrt{8} = 4^{\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{2}} = (2\times 8)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$.

Exercice N°21

→ FAUX

Cf. le cours : pour tout entier naturel *n* non nul : $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{n}} = +\infty$.

Exercice N°22

→ **VRAI**

Pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$, on a : $2x+3>0$ et :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}=\frac{1}{\left((2x+3)^2\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{(2x+3)^{\frac{2}{3}}}=(2x+3)^{-\frac{2}{3}}$$