

Exercice N°10

→ FAUX

La suite u considérée est une suite géométrique de raison $0,999$. Comme $0,999 \in]-1; +1[$, la suite u converge vers 0 . On peut aussi raisonner sur un plan plus général. Pour tout n entier naturel, on a : u_n positif. La suite u est donc minorée par 0 . On montre facilement qu'elle est décroissante. Toute suite décroissante et minorée converge. La suite u est donc convergente.

Exercice N°11

→ FAUX

On peut par exemple considérer la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -n$. La suite u vérifie la condition imposée mais on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exercice N°12

→ FAUX

Il suffit de considérer une suite strictement croissante mais majorée pour mettre ce résultat en défaut. On peut par exemple choisir la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice N°13

→ FAUX

Cette question est plus délicate ... Une façon simple de construire un contre-exemple consiste à s'intéresser à une suite u dont les termes pairs et impaires ont des comportements radicalement différents (on va en fait travailler sur deux sous-suites de u ...). Par exemple, on peut choisir la suite u définie par :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Cette suite n'est pas majorée puisque pour tout réel M , on peut trouver un indice n impair tel que $u_n > M$. Mais la suite u n'admet pas une limite infinie en $+\infty$ puisque quel que soit le rang considéré, on aura toujours, à un rang ultérieur, un terme (de rang pair) nul.

Exercice N°14

→ VRAI

On a classiquement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. Il vient alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x - 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$.

Exercice N°15**→ VRAI**

Une factorisation va nous permettre de conclure :

$$f(x) = -2\sqrt{x} + 3x = x \left(\frac{-2\sqrt{x}}{x} + 3 \right) = x \left(\frac{-2}{\sqrt{x}} + 3 \right)$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x}} = 0$. D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{\sqrt{x}} + 3 \right) = 3$. Par produit,

on en déduit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice N°16**→ FAUX**La fonction f prend des valeurs négatives à gauche de 1 et positives à droite. Comme

$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$, on a alors facilement : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

Exercice N°17**→ VRAI**

C'est une limite classique à connaître !

Exercice N°18**→ FAUX**Pour tout x réel, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$. On en déduit : $-1 - x \leq \cos x - x \leq 1 - x$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$, il vient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice N°19**→ FAUX**

Cette limite peut prendre diverses valeurs ! Tout dépend de la façon dont la fonction f tend vers 0 et de la fonction g !

Par exemple, avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{-2}{\sqrt{x}}$, on a : $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{x} \times \frac{\sqrt{x}}{-2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Il vient alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = 0$

Mais avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{7}{x+2}$, on a : $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{7}{x+2}} = \frac{1}{x} \times \frac{x+2}{7} = \frac{1}{7} \frac{x+2}{x}$.

Il vient cette fois : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x} = 1$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{7}$.

Enfin, avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{-5}{x^2+11}$, on a : $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-5}{x^2+11}} = \frac{1}{x} \times \frac{x^2+11}{-5} = \frac{-1}{5} \frac{x^2+11}{x}$.

Il vient alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+11}{x} = +\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Exercice N°20

→ FAUX

Comme précédemment, on peut exhiber diverses situations conduisant à des limites ... tout aussi diverses !

Exercice N°21

→ VRAI

Pour tout x réel positif, on a la double inégalité : $0 \leq \sin x \leq x$. Donc, pour tout x réel, on a : $0 \leq \sin |x| \leq |x|$, soit encore : $0 \leq |\sin x| \leq |x|$. On écrit donc ici : $0 \leq |\sin u_n| \leq |u_n|$.

Comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$ et on tire de l'encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\sin u_n| = 0$ et, finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin u_n = 0$.

Exercice N°22

→ FAUX

Pour tout x réel, on a l'encadrement : $-1 \leq \sin x \leq 1$. Puis, pour tout réel x strictement positif :

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, il vient (théorème des « gendarmes ») : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.