Vrai ou faux – Page 281

Exercice N°10

→ FAUX
A partir de $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on obtient classiquement :

$$zz' = (x+iy)(x'+iy') = (xx'-yy') + i(xy'+x'y)$$

D'où : $\mathrm{Re}(zz') = xx' - yy' = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$.

Dans le cas général, on a donc : $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z')$.

Exercice N°11

→ VRAI
On a : $i^{2001} = i^{2000} \times i = i^{2\times 1000} \times i = \left(i^2\right)^{1000} \times i = (-1)^{1000} \times i = 1 \times i = i$.

Exercice N°12

→ VRAI
On a :

$$\overline{\left(\frac{1-2i}{1+i}\right)} = \frac{\overline{1-2i}}{\overline{1+i}} = \frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+2i-2}{1+1} = \frac{-1+3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

Exercice N°13

→ VRAI
Pour tout nombre complexe z : $|iz| = |i| \times |z| = 1 \times |z| = |z|$.

Exercice N°14

→ FAUX
Le piège est classique ! Pour pouvoir conclure, il faut que le module de z (il est égal à 2) soit en facteur. Ici c'est -2 qui est en facteur …
On a :

$$\begin{aligned} z &= -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Et on en déduit qu'un argument du complexe z est $\frac{4\pi}{3}$.

Exercice N°15

→ VRAI

On a : $\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}}{\sqrt{2}\times\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}}{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\,\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}-\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

(Démarche classique à connaître : mise en facteur du module)

Exercice N°16

→ VRAI

Pour tout y réel : $\left|\dfrac{1}{2+iy}-\dfrac{1}{4}\right|=\left|\dfrac{4-(2+iy)}{4(2+iy)}\right|=\left|\dfrac{2-iy}{4(2+iy)}\right|=\dfrac{1}{4}\left|\dfrac{2-iy}{2+iy}\right|=\dfrac{1}{4}\dfrac{|2-iy|}{|2+iy|}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\left|\overline{2+iy}\right|}{|2+iy|}=\dfrac{1}{4}$.

Exercice N°17

→ FAUX

En notant, classiquement, les affixes avec des lettres minuscules, il vient :

$$\mathrm{AB}^2=\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|^2=|b-a|^2=|(3+5i)-(1-2i)|^2=|2+7i|^2=2^2+7^2=4+49=53$$

$$\mathrm{AC}^2=\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|^2=|c-a|^2=|(-4+3i)-(1-2i)|^2=|-5+5i|^2=(-5)^2+5^2=25+25=50$$

Comme : $\mathrm{AB}^2\neq\mathrm{AC}^2$, on a : $\mathrm{AB}\neq\mathrm{AC}$ et le triangle n'est pas équilatéral.

Exercice N°18

→ VRAI

On a :

$$\begin{aligned}-\sin\theta-i\cos\theta&=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\cos\left(-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)+i\sin\left(-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\&=\cos\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Exercice N°19

→ VRAI

On peut établir le résultat de diverses façons. Notons M le point d'affixe $\bar{z}$ et N le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

Comme : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{1}{|z|^2}\bar{z}$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$, d'affixe $\dfrac{1}{z}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ d'affixe $\bar{z}$ sont colinéaires.

D'où le résultat.

Exercice N°20

→ **VRAI**

Pour tout réel θ, on a : $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

Exercice N°21

→ **FAUX**

Voir le cours ; dans $\mathbb{C}$, tout nombre réel (quel que soit son signe) admet deux racines carrées (éventuellement confondues lorsque le réel considéré est nul …).

Exercice N°22

→ **VRAI**

On a, pour $z = 1 + i\sqrt{2000}$:

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 2001 &= \left(1 + i\sqrt{2000}\right)^2 - 2\left(1 + i\sqrt{2000}\right) + 2001 \\ &= 1 + 2i\sqrt{2000} - 2000 - 2 - 2i\sqrt{2000} + 2001 \\ &= (1 + 2001 - 2000 - 2) + 2i\left(\sqrt{2000} - \sqrt{2000}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercice N°23

→ **FAUX**

L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$ est : $z' = e^{-i\frac{\pi}{6}}z$. Or, $-e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{6}}$ et $\frac{7\pi}{6}$ n'est pas congru à $-\frac{\pi}{6}$ modulo 2π (la différence n'étant pas un multiple de 2π).