Vrai ou faux – Page 315

Exercice N°10

→ **FAUX**
Piège classique ! Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peuvent être de sens opposés.
On a alors : $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi\ (2\pi)$ et :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

Exercice N°11

→ **FAUX**
Reconnaissons que l'énoncé est un tantinet … vicieux.
« Toute équation … » est le point clé ! Toute ? Eh bien non !Choisissez $a = b = 0$ et $c = 2$, par exemple, et l'équation obtenue, $2 = 0$, définit simplement l'ensemble vide ! Choisissez $a = b = c = 0$ et l'équation obtenue, $0 = 0$, définit … le plan tout entier.

Exercice N°12

→ **VRAI**
On a :

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2 \end{aligned}$$

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, cette équation est bien celle du cercle de centre $\mathrm{A}(1\,;-2)$ et de rayon 3.

Exercice N°13

→ **FAUX**
On peut procéder de diverses façons. On a, par exemple, en tenant compte de $\|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\| = 1$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right).\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} = -\overrightarrow{\mathrm{CA}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} \\ &= -\|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\| \times \|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\| \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) + \|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\| \times \|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\| \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) \\ &= -\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) + \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) \end{aligned}$$

Or, les triangles ACD et BCD sont équilatéraux. On en déduit immédiatement que l'on a : $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right) = \pm\frac{\pi}{3}\left(2\pi\right)$ et $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right) = \pm\frac{\pi}{3}\left(2\pi\right)$. D'où : $\cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right) = \cos\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right)$ et, finalement : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

$\boxed{\text{Exercice N°14}}$

→ VRAI

D'après l'exercice précédent : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont bien orthogonaux.

$\boxed{\text{Exercice N°15}}$

→ FAUX

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\left(BCD\right)$. Si $\overrightarrow{AB}$ était un vecteur normal au plan $\left(BCD\right)$, il serait orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Certes, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (cf. l'exercice précédent) sont orthogonaux mais les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne le sont pas puisque :

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 .$$

$\boxed{\text{Exercice N°16}}$

→ FAUX

Si c'était le cas, le vecteur $\overrightarrow{AB}$, dont ce représentant est obtenu à partir de deux points distincts du plan $\left(ABD\right)$, serait orthogonal à tout vecteur non nul obtenu à partir de points du plan $\left(BCD\right)$ comme, par exemple, le vecteur $\overrightarrow{BC}$. Or, d'après l'exercice précédent, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas orthogonaux.

$\boxed{\text{Exercice N°17}}$

→ VRAI

Le repère considéré étant orthonormal, on a simplement :

$$\vec{u}.\vec{v} = 1 \times 2 + \left(-2\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 5 \times \left(-1\right) = 2 + 3 - 5 = 0$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

Exercice N°18

→ FAUX
Le repère considéré étant orthonormal, le vecteur $\vec{n}(3\,;-1\,;1)$ est normal au plan d'équation $3x-y+z=0$. Or, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ admet pour coordonnées : $\left(-\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;-\frac{2}{3}\right)$. Comme $\frac{-\frac{2}{3}}{3}\neq\frac{-\frac{2}{3}}{1}$, les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires et H ne peut être le projeté orthogonal de A sur le plan d'équation $3x-y+z=0$.
A titre d'entraînement, je vous conseille de déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur le plan d'équation $3x-y+z=0$. On obtient le point : $A'\left(-\frac{9}{11}\,;\frac{3}{11}\,;-\frac{3}{11}\right)$.

Exercice N°19

→ VRAI
Le repère considéré étant orthonormal, les vecteurs $\vec{n}(1\,;2\,;-5)$ et $\vec{t}\,(1\,;2\,;1)$ sont des vecteurs normaux, respectivement des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.
Or : $\vec{n}.\vec{t}=1\times1+2\times2+(-5)\times1=1+4-5=0$.
Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$ sont orthogonaux et, de fait, les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont perpendiculaires.

Exercice N°20

→ VRAI
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées $(2\,;-2\,;2)$.
Or, le repère considéré étant orthonormal, le vecteur $\vec{n}(1\,;-1\,;1)$ est normal au plan d'équation $x-y+z=0$. Ainsi, on a : $\overrightarrow{AB}=2\vec{n}$ est également un vecteur normal au plan d'équation $x-y+z=0$.
Par ailleurs, le point I, milieu du segment $[AB]$, admet pour coordonnés :
$\left(\frac{0+2}{2}\,;\frac{4+2}{2}\,;\frac{1+3}{2}\right)$, soit : $(1\,;3\,;2)$. On constate alors que les coordonnées du point I vérifient l'équation $x-y+z=0$.
En définitive, le plan d'équation $x-y+z=0$ passe par le milieu du segment $[AB]$ et est perpendiculaire à la droite (AB). Il s'agit bien du plan médiateur du segment $[AB]$.

Exercice N°21

→ VRAI
Cf. le cours : il s'agit d'un ½ espace fermé de frontière le plan d'équation $x=0$.