
Vrai ou faux – Page 51

Exercice N°8

→ **VRAI**

La fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 7$ est continue sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme.

Exercice N°9

→ **VRAI**

La fonction f définie sur $]-\infty; +1[\cup]+1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x - 1}$ est continue sur chacun des intervalles de son ensemble de définition (donc $]-\infty; +1[$ et $] +1; +\infty[$ ici) en tant que fonction rationnelle.

Exercice N°10

→ **FAUX**

On a $E(101) = 101$ mais pour tout réel x dans $] +100; +101[$, on a $E(x) = 100$.

On a donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 101 \\ x < 101}} f(x) = 100 \neq f(101)$. La fonction f n'est donc pas continue en $a = 101$.

Exercice N°11

→ **VRAI**

La fonction $x \mapsto \cos(2x+1)$ est la composée de la fonction $x \mapsto 2x+1$ qui est continue sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme et de la fonction cosinus qui est continue sur \mathbb{R} .

Exercice N°12

→ **VRAI**

La fonction partie entière ne prend, par définition, que des valeurs entières.

Exercice N°13

→ **FAUX**

Nous pourrions conclure par l'affirmative si la fonction f était continue. Cette caractéristique n'étant pas précisée, on peut facilement imaginer une fonction satisfaisant les données et ne s'annulant pas sur l'intervalle $[0; +1]$ (à vous d'en construire une !).

Exercice N°14

→ **VRAI**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - x - 1$. Cette fonction est continue sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme. On a facilement : $f(-1) = (-1)^3 - (-1) - 1 = -1 + 1 - 1 = -1$ et $f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 8 - 3 = 5$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors d'affirmer qu'il existe un réel c dans $] -1; +2[$ tel que $f(c) = 0$. Ce qui équivaut à affirmer que l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ admet au moins une solution entre -1 et 2 .

Exercice N°15

→ **FAUX**

La fonction $f : x \mapsto x^5 + x - 7$ est une fonction polynôme. Elle est donc définie et continue sur \mathbb{R} . A partir de là, on peut argumenter de deux façons : soit on travaille avec les limites (c'est le fait que le degré soit impair qui nous conduit sur cette voie) ; soit on considère un intervalle judicieusement choisi.

- 1^{ère} approche.

On a facilement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + x - 7) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + x - 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors de conclure que l'équation $x^5 + x - 7 = 0$ admet au moins une solution sur \mathbb{R} .

- 2^{ème} approche.

On a : $f(0) = 0^5 + 0 - 7 = -7$ et $f(2) = 2^5 + 2 - 7 = 32 + 2 - 7 = 27$. Comme

$f(0) < 0$ et $f(2) > 0$, on conclut, ici encore en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $x^5 + x - 7 = 0$ admet au moins une solution sur $]0; +2[$.

Exercice N°16

→ **VRAI**

Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x - \cos x$. Cette fonction est la différence de deux fonctions continues sur l'intervalle considéré ; elle est donc elle-même continue. Par ailleurs, on a : $f(0) = 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1 < 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $f(x) = 0$ équivaut à $\cos x = x$, on a le résultat.

Exercice N°17

→ FAUX

La fonction f est continue et strictement monotone sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. Par ailleurs, on a :

$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$. On en déduit, grâce aux théorème des valeurs

intermédiaires, que pour tout réel k dans $]-\infty; +\infty[$ (c'est-à-dire \mathbb{R}), il existe un unique réel α de I tel que $f(\alpha) = k$. En particulier, pour $k = 2002$, il existe un unique réel c de I tel que $f(c) = 2002$. L'équation $f(x) = 2002$ admet une unique solution sur I .

Exercice N°18

→ VRAI

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^5 + 2x - 7$. Sa dérivée est définie par :

$f'(x) = 5x^4 + 2$ et est donc strictement positive sur \mathbb{R} . La fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} . Elle est par ailleurs continue en tant que fonction polynôme. Enfin, on a : $f(1,33) = 1,33^5 + 2 \times 1,33 - 7 = -0,17842$ et $f(1,34) = 1,34^5 + 2 \times 1,34 - 7 = 0,0004$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors d'affirmer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $]1,33; 1,34[$ tel que $f(x) = x^5 + 2x - 7 = 0$, c'est-à-dire solution de l'équation $x^5 + 2x = 7$.

Exercice N°19

→ VRAI

D'après le tableau de variation fourni, la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-1; +1[$. On a par ailleurs : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$ et $f(1) = -1$. Le théorème des valeurs

intermédiaires nous permet alors d'affirmer que pour tout λ de l'intervalle $]-1; +\infty[$, il existe un unique réel c dans $]-1; +1[$ tel que $f(c) = \lambda$. Le résultat est ainsi établi.