Vrai ou faux – Page 75

Exercice N°10

→ FAUX
La continuité n'entraîne pas la dérivabilité ! C'est la réciproque qui est vraie (cf. le cours) : si une fonction est dérivable en *a* alors elle est continue en *a*.

Exercice N°11

→ VRAI
Il s'agit de la contraposée du théorème du cours !
« Si une fonction est dérivable en *a* alors elle est continue en *a*. » équivaut à « Si une fonction n'est pas continue en *a* alors elle n'est pas dérivable en *a*. ».

Exercice N°12

→ FAUX
La fonction *f* admet pour fonction dérivée la fonction f' (voir la dérivation des fonctions composées de la forme $x \mapsto f(ax+b)$) définie par : $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ définie sur $]2;+\infty[$.

Exercice N°13

→ VRAI
La fonction *f* est définie par : $f : x \mapsto \frac{1}{x^7} = x^{-7}$. On peut utiliser la formule du cours (voir la dérivation des fonctions de la forme $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$) et la dérivée de *f* est alors définie par : $f'(x) = -7 \times x^{-7-1} = -7 \times x^{-8} = \frac{-7}{x^8}$.

Exercice N°14

→ VRAI
La fonction *f* admet pour fonction dérivée la fonction f' (voir la dérivation des fonctions composées de la forme $x \mapsto f(ax+b)$) définie par : $f' : x \mapsto 3(x-1)^2$ qui prend des valeurs strictement positives sauf en $a = 1$ où elle s'annule. D'où la conclusion.

Exercice N°15

→ VRAI
Cf. le cours. Une fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle.

Exercice N°16

→ **VRAI**
La fonction *f* admet pour fonction dérivée la fonction f' (voir la dérivation des fonctions polynômes) définie par : $f':x\mapsto 12x^3-24x^2+12x=12x\left(x^2-2x+1\right)=12x\left(x-1\right)^2$.
On a $f'\left(0\right)=0$ et $\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ f'\left(x\right)>0$. La fonction *f* est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice N°17

→ **FAUX**
Erreur classique à ne plus commettre ! Pensez à la fonction $x\mapsto x^3$ en $a=0$ (la dérivée s'y annule mais la fonction n'admet pas d'extremum) ou, de façon plus générale aux fonctions $x\mapsto x^{2n+1}$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) en $a=0$.

Exercice N°18

→ **VRAI**
On a pour tout *x* réel :

$$\sin\left(x-\pi\right)=-\sin x \text{ et } \cos\left(x-\pi\right)=-\cos x$$

On en déduit que pour tout *x* différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) :

$$\tan\left(x-\pi\right)=\frac{\sin\left(x-\pi\right)}{\cos\left(x-\pi\right)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$$

Exercice N°19

→ **VRAI**
La fonction *f* est dérivable sur $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ comme différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (une fonction constante et la fonction tangente) et on a, pour tout réel x de $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$:

$$f'\left(x\right)=-\frac{1}{\cos^2\left(x\right)}$$

La fonction f' prend donc des valeurs strictement négatives sur $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$. La fonction *f* est ainsi strictement décroissante sur cet intervalle.

Exercice N°20

→ **FAUX**
On a $f\left(0\right)=0$. Intéressons-nous alors à : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f\left(0+h\right)-f\left(0\right)}{h}$. On s'intéresse donc en fait à la dérivabilité <u>à droite</u> en 0.

On a : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{f(h)}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{h\sqrt{h}}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \sqrt{h} = 0$.

La fonction *f* est donc dérivable à droite en 0 et on a : $f'(0) = 0$.

Remarque : on aurait pu dériver la fonction *f* en tant que produit pour tout réel *x* strictement positif puis étudier la limite de la fonction dérivée lorsque *x* tend vers 0 mais cette approche n'est pas au programme de la classe de terminale S.

Exercice N°21

→ FAUX

On a $f(1) = 0$. Intéressons-nous alors à : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{\sqrt{1-x} \times \sqrt{1+x}}{-\sqrt{1-x}^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \left(-\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \right) = -\infty$.

La fonction *f* n'est donc pas dérivable en 1.

Exercice N°22

→ FAUX

La fonction $\sin u$ est effectivement dérivable en tant que composée d'une fonction (la fonction *u*) dérivable sur I et d'une fonction (la fonction sinus) dérivable sur $\mathbb{R}$.

Mais on a (cf. la dérivation des fonctions composées) :

$$(\sin u)' = u' \times \cos u$$