Interro Spé TS5
9 /10/2013
1 HEURE
Toutes calculettes

CORRIGE

Exercice 1 : (4p)

A la calculatrice, on obtient facilement :

$$2\,171 = 13 \times 167$$
577 est premier
907 est premier
$$45\,057 = 3 \times 23 \times 653$$

Exercice 2 : (3.5p)

$2n-3$ divise $-3(2n-3) = -6n+9$.

Si $2n-3$ divise $3n+2$ alors $2n-3$ divise $2(3n+2) = 6n+4$.

On déduit de ce qui précède que $2n-3$ divise $-6n+9+(6n+4) = 13$.

Comme $2n-3$ est un entier relatif, il peut donc prendre ses valeurs dans $\{-13\,;-1\,;1\,;13\}$.

- $2n-3 = -13$, soit $n = -5$. $3n+2 = -13$ et -13 divise -13.
- $2n-3 = -1$, soit $n = 1$. $3n+2 = 5$ et 1 divise 5.
- $2n-3 = 1$, soit $n = 2$. $3n+2 = 8$ et 2 divise 8.
- $2n-3 = 13$, soit $n = 8$. $3n+2 = 26$ et 13 divise 26.

Les entiers relatifs *n* tels que $2n-3$ divise $3n+2$ sont -5, 1, 2 et 8.

Exercice 3 : (2.5p)

On a facilement :

$$3x = 14 - 24y \Leftrightarrow 3x + 24y = 14 \Leftrightarrow 3(x+8y) = 14$$

Or, 14 n’est pas divisible par 3. On en déduit immédiatement qu’il n’existe pas de couple $(x,\, y)$ d’entiers relatifs, solution de l’équation (E).

Il n’existe pas de couple $(x,\, y)$ d’entiers relatifs, solution de l’équation (E).

Exercice 4 : (3p)

a) On a une différence de deux carrés. D'où :

$$n^4 - 1 = \left(n^2\right)^2 - 1 = \left(n^2 - 1\right)\left(n^2 + 1\right) = \left(n - 1\right)\left(n + 1\right)\left(n^2 + 1\right)$$

b) Comme $9\,999 = 10\,000 - 1 = 10^4 - 1$, le résultat précédent donne, avec $n = 4$:

$$9\,999 = 10^4 - 1 = \left(10 - 1\right)\left(10 + 1\right)\left(10^2 + 1\right) = 9 \times 11 \times 101$$

9 999 admet pour diviseurs : 9, 11 et 101.

Exercice 5 : (4p)

a) On a facilement :

$$\begin{aligned}\left(a^2 + 2b^2 + 2ab\right)\left(a^2 + 2b^2 - 2ab\right) &= \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - \left(2ab\right)^2 \\ &= \left(a^2\right)^2 + 2 \times a^2 \times 2b^2 + \left(2b^2\right)^2 - 4a^2b^2 \\ &= a^4 + \cancel{4a^2b^2} + 4b^4 \cancel{-4a^2b^2} \\ &= a^4 + 4b^4 \\ &= A\end{aligned}$$

Pour tous *a* et *b* entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, on a bien : $A = a^4 + 4b^4 = \left(a^2 + 2b^2 + 2ab\right)\left(a^2 + 2b^2 - 2ab\right)$

Remarque : cette égalité est en fait vraie pour tous *a* et *b* réels.

b) Comme *a* et *b* sont supérieurs ou égaux à 2, il vient : $a^2 \geq 4$, $b^2 \geq 4$ et $ab \geq 4$.
On en déduit : $a^2 + 2b^2 + 2ab \geq 4 + 2 \times 4 + 2 \times 4 = 20$.

Par ailleurs, on a : $a^2 + 2b^2 - 2ab = \left(a^2 + b^2 - 2ab\right) + b^2 = \left(a - b\right)^2 + b^2$.

Comme $\left(a - b\right)^2 \geq 0$, il vient : $\left(a - b\right)^2 + b^2 \geq b^2 \geq 4$.

Ainsi, aucun des deux facteurs n'est égal à 1 et donc aucun n'est égal à *A*. Cette factorisation nous permet donc d'affirmer que *A* n'est pas premier.

Pour *a* et *b* entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, *A* n'est jamais premier.

Exercice 6 : (3p)

a) *n* est un carré d'entier s'il existe un entier *k* tel que $n = k^2$. $n + p$ est un carré d'entier s'il existe un entier *m* tel que $n + p = m^2$. On peut d'emblée remarquer que s'il existe un tel couple (k, m) alors les couples $(-k, m)$, $(k, -m)$ et $(-k, -m)$ satisfont aussi les contraintes imposées. On peut donc se limiter à chercher *k* et *m* dans $\mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{cases} n = k^2 \\ n + p = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = k^2 \\ k^2 + p = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = k^2 \\ p = m^2 - k^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = k^2 \\ p = (m-k)(m+k) \end{cases}$$

p étant premier et comme $m - k < m + k$, il vient nécessairement $m - k = 1$ et $m + k = p$.
En additionnant membre à membre ces deux égalités, il vient : $2m = p + 1$.
Ainsi, si $p = 2$, le problème n'admet pas de solution (c'est un résultat classique ! La différence de deux carrés d'entiers ne peut être égale à 2).
Si $p \notin \{-2\,;\,2\}$, *p* est nécessairement impair et il vient : $m = \dfrac{p+1}{2}$.
D'où : $n = m^2 - p = \left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2 - p = \dfrac{(p+1)^2}{4} - p = \dfrac{(p+1)^2 - p}{4} = \dfrac{(p-1)^2}{4} = \left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2$.
Remarque : de $m - k = 1$ et $m + k = p$ on tire aussi, en soustrayant ces égalités membre à membre : $k = \dfrac{p-1}{2}$.

Pour tout entier *p* premier différent de -2 et de 2, il existe un entier $n = \left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2$ tel que $n + p$ soit le carré d'un entier.

b) Pour $p = 17$, on a, d'après la question précédente : $n = \left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{17-1}{2}\right)^2 = 8^2 = 64$.

On a bien : $n + p = 64 + 17 = 81$ qui est le carré d'un entier ($81 = 9^2$).

Pour $p = 17$, on a $n = 64$.